

数 学

(その 1)

1 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 次の数列は、分母が2のべき乗で分子が奇数の分数 (< 1) を並べたものである。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \dots$$

(1-1) この数列の第100項を求めよ。

(1-2) この数列の初項から第100項までの和を求めよ。

(2) $0 \leq x < 2\pi$ とする。次の連立不等式を解け。

$$0 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3}\cos x \leq 1$$

(3) x の方程式 $\log_a(x-1) + \log_a(4-x) = -2$ が解をもつような実数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) x の方程式 $x\sqrt{x} - m\sqrt{x} + 1 = 0$ が相異なる2つの実数解をもつための、実数 m のとりうる値の範囲を求めよ。

(5) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{n}\right)\left(1 + 2 \cdot \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + 2 \cdot \frac{n}{n}\right)}$$

とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

2 実数 a は不等式 $0 \leq a \leq 1$ を満たすものとする。また、実数 t に対し、放物線 $y = -x^2 + 1$ 上の点 $(t, -t^2 + 1)$ における接線を l とし、点 $(a, 0)$ から l までの距離を d とする。

- (1) d を求めよ。
- (2) $d = f(t)$ とおく。 t がすべての実数を変わる時、関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ を求めよ。
- (3) t がすべての実数を変わる時、関数 $f(t)$ が極大となる t の値の個数、および極小となる t の値の個数をそれぞれ求めよ。

数 学

(その2)

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) $\sqrt{7} + 12$ の整数部分を x ，小数部分を y とする。 $x - \frac{3}{y}$ の整数部分の値を求めよ。
- (2) 72^n (n は自然数) の正の約数の個数がちょうど $13n + 111$ に等しいとする。 n の値を求めよ。
- (3) 半径 r の 4 個の小球が互に外接している。次の各問に答えよ。
 - (3-1) 各小球の中心を 4 つの頂点とする正三角錐の体積を求めよ。
 - (3-2) 4 個の小球が内接する球の半径を求めよ。
- (4) $\triangle ABC$ の頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする。また、辺 BC, CA, AB をそれぞれ $m:n$ に内分する点を P, Q, R とする。ただし、 m, n は正の数とする。次の各問に答えよ。
 - (4-1) 点 P の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
 - (4-2) $\triangle PQR$ の重心を G とする。点 G の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

4 次の『』の中の文章を読み、以下の問(1)～(5)に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

『下図のように、4つの水路①～④で結ばれた4つの池A～Dがある。池の高さの違いにより、池Aの水は水路①を経て池Bに流れ込み、続いて2つの水路②および④を経て流れる。水路②を通った水は池Cに流れ込み、さらに水路③を経て池Dに到達する。また、水路④を通った水は池Dに直接流れ込む。なお水量が十分にあるとき、各池に流れ込んだ水は下流に流れてもその一部は池に残る。』

4つの水路にはそれぞれ途中で水門があり、水門が閉じているとき水は下流に流れない。各水門の開閉は互いに独立に定まり、水路①～④の各水門が開いている確率はそれぞれ $p_1 \sim p_4$ (いずれも0以上1以下の実数)である。

今、4つの池に水が無いことを確認した後、池Aに十分な量の水を注ぎ込むとする。』

- (1) 水が池Cに流れ込む確率を求めよ。
- (2) 水が池Dに流れ込む確率を求めよ。
- (3) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。次の各条件付確率を求めよ。
 - (3-1) 池Dに水が到達しているとき、池Cに水が流れ込んでいる確率。
 - (3-2) 池Dに水が到達していないとき、池Cに水が流れ込んでいる確率。
- (4) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。水路②か水路④のどちらか一方のみを通して水が池Dに到達する確率を求めよ。
- (5) (4)の確率が最大となる p の値を求めよ。

