〔1〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{12}$ の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

(2) $a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

〔 **2** 〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする．

(1) xy 平面上の点 (p, q) に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ．

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ．

(3) 直線

$$mx + ny = 0$$

に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ．ただし m, n は共には 0 でないとする．

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ．

〔 3 〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{14}$ の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える．円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である．正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である．$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする．

(1) 高さが $z = t$ $(-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ．

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ．

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ．

〔 **4** 〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{\mathrm{A}}$ ， $\boxed{\mathrm{B}}$ ， $\boxed{\mathrm{C}}$ より 1 問を選択し，解答紙 $\boxed{15}$ の $\boxed{}$ （2 個所）に選択した問題符号 **A**，**B**，**C** のいずれかを記入してから解答しなさい．

$\boxed{\mathrm{A}}$

複素数平面上の点 z を考える．

(1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか．ただし，$\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す．

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p, q に対して

$$d(z-p)(\bar{z}-\bar{q}) = \bar{d}(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか．

$\boxed{\mathrm{B}}$

サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i = 1, \ldots, n)$ とする．

(1) $n = 7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする．このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ．

(2) 一般の n に対して，$X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ．

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1)$ を求めよ．ここで log は自然対数を表す．

(5) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

m, n を自然数とする．次の算法を考える．

(a) $i = m$, $j = n$, $k = 0$.

(b) $i = 1$ ならば $\mathrm{Ans} = k + j$ として終了する．

(c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする．

(d) $i = [i/2]$.

(e) $j = 2 * j$.

(f) (b) にもどる．

（ここで，$[x]$ は x を越えない最大の整数を表す．）

(1) $m = 100$ のとき，3周目と4周目の (b) における i, j, k の値を求めよ．たとえば1周目では $i = 100$, $j = n$, $k = 0$ である．

(2) 一般の m に対して，(b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は1周目から最後まで一定であることを示せ．

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ．

(4) ℓ を自然数とする．$m = 3 \cdot 2^{\ell}$ のとき，終了するまでに何回 (d) を実行するか．

〔 5 〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{\mathrm{D}}$， $\boxed{\mathrm{E}}$， $\boxed{\mathrm{F}}$ より 1 問を選択し，解答紙 $\boxed{16}$ の $\boxed{}$（2 個所）に選択した問題符号**D**，**E**，**F**のいずれかを記入してから解答しなさい．

$\boxed{\mathrm{D}}$

関数$f(x)$の第 2 次導関数はつねに正とし，関数$y=f(x)$のグラフG上の点$P(t,\ f(t))$における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$とする．ただし $\theta(t)$は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする．また，点PにおけるGの法線上にPから距離 1 の点 $Q(\alpha(t),\beta(t))$をGの下側にとる．

(1) $\theta(t)$はつねに増加することを示せ．

(2) $\alpha(t)$，$\beta(t)$を求めよ．

(3) tがaからb（$a<b$）まで変化するとき，点P,Qが描く曲線の長さをそれぞれL_1,L_2とする．L_2-L_1を$\theta(a)$と$\theta(b)$を用いて表せ．

$\boxed{\mathrm{E}}$

(1) eを自然対数の底とし，

$$f(x)=e^x-(1+x+\frac{1}{2}x^2)$$

とおく．$0<x<1$においては$0<f(x)<x^3$が成り立つことを示せ．また

$$\lim_{n\to\infty}n^2f(\frac{1}{n})=0$$

を示せ．必要であれば$e<3$を使ってよい．

(2) 関数$g(x)=e^x$を考える．区間$0\leqq x\leqq 1$をn個の小区間に等分して，各小区間を底辺，小区間の左端の点における関数$g(x)$の値を高さとする長方形の面積の和をK_nとする．$n\to\infty$ のとき，

$$n^k\left|\int_0^1 g(x)dx-K_n\right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数kとそのときの極限値を求めよ．

F

p, q を整数とし，x, y を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 4x + 9y = p \\ 2x + 6y = q \end{cases}$$

を考える.

(1) この方程式を行列を用いて表し，係数行列の逆行列を求めよ.

(2) 上の連立方程式の解 x, y が共に整数であるような組 (p, q) をすべて求めよ.
ただし

$$0 \leqq p \leqq 5, \qquad 0 \leqq q \leqq 5$$

とする.

(3) 正の整数 d で,「d のどんな倍数 p, q に対しても上の連立方程式の解 x, y が整数になる」ものが存在することを示せ.

(4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ.