〔1〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{12}$ の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

平面上を運動する点 P(x, y) の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている．ただし，e は自然対数の底である．原点を O，点 $(0, 1)$ を M とする．t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする．時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) 点 P(x, y) の座標 x, y に対して y を x を用いて表せ．

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ．

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ．

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す．ただし，1 および a 自身も約数とする．たとえば $f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする．このとき

$$f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$$

が成り立つことを示せ．

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき

$$f(a)\geqq (p+1)q$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(3) 正の偶数 a, b は，ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a=2^m r$，$b=2^n s$ のように表すことができる．このとき a, b が

$$\begin{cases} f(a)=2b \\ f(b)=2a \end{cases}$$

をみたせば，r, s は素数であり，かつ $r=2^{n+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となることを示せ．

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{14}$ の定められた場所に記入しなさい.

〔問題〕

次の問いに答えよ.

(1) すべての正の実数 x, y に対して，不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．ここで log は自然対数を表す.

(2) a, b は実数で $a < b$ とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

をみたす．このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) a, b は実数で $a < b$ とする．閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

とする．不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ.

〔4〕 (配点 50 点)

次の問 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ より1問を選択し，解答紙 $\boxed{15}$ の $\boxed{}$ (2個所)に選択した問題符号 **A**, **B**, **C** のいずれかを記入してから解答しなさい.

$\boxed{\text{A}}$

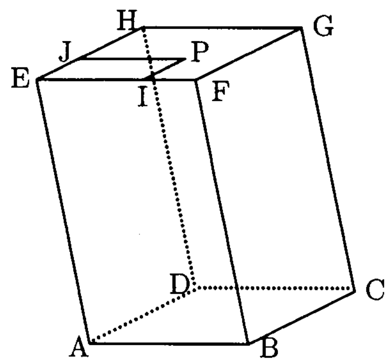
空間内の図形について次の問いに答えよ.

(1) △ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

に等しいことを示せ. ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す. 必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい.

(2) 右図の平行六面体 ABCD−EFGH を考える. $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2$ とし，$\angle \mathrm{FBC}=\angle \mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{EAB}=\theta$ とする. ここで θ は $0<\theta<\pi$ なる定数とする. 面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし, 点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす. $x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$, $y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を θ, x, y を用いて表せ.



(平行六面体 ABCD−EFGH)

(3) 問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ.

$\boxed{\text{B}}$

複素数平面上の原点を中心とする半径1の円 C 上に相異なる3点 z_1, z_2, z_3 をとる. 次の問いに答えよ.

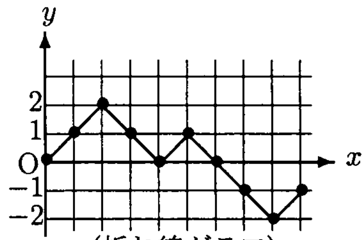
(1) $w_1=z_1+z_2+z_3$ とおく. 点 w_1 は3点 z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ. ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした3本の垂線の交点のことであり，これら3本の垂線は1点で交わることが知られている.

(2) $w_2 = -\overline{z_1}z_2z_3$ とおく．$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2, z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ．ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である．

(3) 2 点 z_2, z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ．ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する．

$\boxed{\text{C}}$

平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という．与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ．同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す．次の問いに答えよ．



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする．原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n + k$ が偶数であることを示せ．また，この必要十分条件がみたされているとき，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ．

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n - 2$ なる整数で，$n + k$ は偶数とする．原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0, k)$, $(1, k), \ldots, (n-2, k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1, k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ．

(3) コインを 9 回投げる．1 回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す．このとき各格子点 (i, T_i)，$i = 0, 1, 2, \ldots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる．ただし，$T_0 = 0$ とする．$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ．

〔5〕 (配点50点)

次の問 $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$, $\boxed{\text{F}}$ より1問を選択し，解答紙 $\boxed{16}$ の $\boxed{}$ (2個所)に選択した問題符号**D**, **E**, **F**のいずれかを記入してから解答しなさい.

$\boxed{\text{D}}$

平面上の点Pの x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて

$$\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

と表されている. θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点Pが描く曲線をCとする. 点Pを $P(\theta)$ で表し，$P_1=P(0)$, $P_2=P\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $P_3=P(\pi)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 方程式

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする. このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる(ただし，楕円の上にない)ための必要十分条件を α のみを用いて表せ.

(2) 点 P_2 における曲線Cの接線を ℓ とする. ℓ の方程式を求めよ.

(3) 次の条件(i), (ii), (iii)をみたす楕円Dを考える.

(i) Dの軸の一つは x 軸上にある.

(ii) Dは点 P_1, P_2 を通る.

(iii) 点 P_2 におけるDの接線は ℓ である.

このとき，点 P_3 は楕円Dの内部に含まれるかどうか判定せよ.

$\boxed{\text{E}}$

正の実数 a の3乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える. 与えられた2以上の整数 p に対して関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x)=x^p-ax^{p-3} \\ g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする. ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である. 次の問いに答えよ.

(1) $g(x)-\sqrt[3]{a}$ は

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{x\text{ の 2 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ.

(2) $p=2$ とする. このとき, $g(x)-\sqrt[3]{a}$ は

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^3\times\frac{x\text{ の 1 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ.

(3) $a=9$, $p=2$ とする. $2<\sqrt[3]{9}<2.1$ に注意して, 不等式

$$0<\sqrt[3]{9}-g(2)<\frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ. また, $\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ(すなわち, 小数第 4 位以下を切り捨てよ).

F

2 次の正方行列 A が零行列でなく $A^2=A$ をみたすとき, **べき等行列**という. 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はべき等行列であり, かつ $ad-bc\neq 0$ とする. このとき, A を求めよ.

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad-bc=0$ をみたすとする. このとき, A がべき等行列であるための必要十分条件を a と d のみを用いて表せ.

(3) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともにべき等行列とする. $A+B$ がべき等行列になるとき, $A+B$ を求めよ. また, そのような A, B の組を一つあげよ.