〔1〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{12}$ の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

xy 平面上で，

$$x = r(t)\cos t, \quad y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ．

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

が成り立つことを示せ．ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である．

(3) (1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$$

と表せることを示せ．

〔2〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい.

〔問題〕

座標平面上で，不等式

$$2|x-4|+|y-5|\leqq 3,\quad 2\big||x|-4\big|+\big||y|-5\big|\leqq 3$$

が表す領域を，それぞれ A，B とする.

(1) 領域 A を図示せよ.

(2) 領域 B を図示せよ.

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ.

〔 3 〕(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{14}$ の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形(周は含まない)を単位正方形と呼ぶことにする．p, n を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x, y) \mid 0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする．L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする．

(1) グラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ．

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ．また，面積 S_n を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ．

〔4〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ から1問を選択し，解答紙 $\boxed{15}$ の $\boxed{}$（左右2箇所）に選択した問題符号**A**，**B**，**C**のいずれかを記入してから解答しなさい．

$\boxed{\text{A}}$

空間内に四面体 OABC があり∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるとする．辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする．

(1) ∠OGA，∠OGB，∠OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ．

(2) 線分 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする．点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く．このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ．

$\boxed{\text{B}}$

$0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$（t は実数全体を動く）が表す直線を ℓ とする．ただし，i は虚数単位である．

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ．

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする．m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ．

$\boxed{\text{C}}$

座標平面上に(0，0)，(1，0)，(1，1)，(0，1)を頂点とする正方形がある．ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a - x)$ の部分に落ちれば当たりとする．ただし，$0 < a \leqq 2$ とする．

(1) ボールを1回落とす．当たる確率を求めよ．

(2) 1回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを2回落とす．1回だけ当たる確率を求めよ．

(3) a の値を変えずにボールを3回落とす．少なくとも1回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ．

〔5〕 (配点 50 点)

次の問 $\boxed{\mathrm{D}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$, $\boxed{\mathrm{F}}$ から 1 問を選択し, 解答紙 $\boxed{16}$ の $\boxed{}$ (左右 2 箇所)に選択した問題符号**D**, **E**, **F**のいずれかを記入してから解答しなさい.

$\boxed{\mathrm{D}}$

座標平面上に点 $\mathrm{P}(a, b)$ があり, P は $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$, $|b| \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動く. また, 点 $\mathrm{Q}(x, y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている. ただし,

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$$

である.

(1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする. P $\neq$ O のとき, $\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値を求め, その最大値を与える点 P の全体を図示せよ.

(2) OQ の最小値と, その最小値を与える点 P の座標を求めよ.

$\boxed{\mathrm{E}}$

θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする. 座標平面上で, $a^2 > 4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q, R とし, 接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とおく. 点 P は $\angle\mathrm{QPR} = \theta$ を満たしている. 点 P の全体が作る図形を G とする.

(1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき, $\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ.

(2) G を数式で表せ.

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ.

$\boxed{\text{F}}$

n を2以上の自然数とする．数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ で与えられている．

(1) 不等式

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$$

が成り立つことを示せ．

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\varDelta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく．数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \varDelta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \varDelta a_k$$

が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ．

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ．