平成17年度入学試験問題

数　　学　数学Ⅰ，数学A　数学Ⅱ，数学B　数学Ⅲ，数学C

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（$\boxed{12}$ から $\boxed{16}$ まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
6. 経済学部経済工学科の配点は，表示されているものの $\dfrac{6}{5}$ です。
7. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

数　　　学　数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

［1］(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{12}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

直線 ℓ： $y = x + a$ が曲線 C： $y = 2\sin x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

[2] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

行列 A と列ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

とし，列ベクトル $\vec{p}_n$ $(n=1,2,\cdots)$ を

$$\vec{p}_1=\vec{a},\qquad \vec{p}_{n+1}=A\vec{p}_n+\vec{b}\quad (n=1,2,\cdots)$$

で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p}=A\vec{p}+\vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

(2) $\vec{q}_n=\vec{p}_n-\vec{p}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおく。$\vec{q}_{n+1}$ と $\vec{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $n=1,2,\cdots$ に対して A^n を求めよ。

(4) $\vec{p}_n$ $(n=1,2,\cdots)$ を求めよ。

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{14}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が (1) で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が (2) の図形 C 上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{15}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

[5] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{16}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}\,(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a \to \infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。

(3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。