# 平成18年度入学試験問題

# 数　　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚( $\boxed{13}$ から $\boxed{17}$ まで)です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
6. 経済学部経済工学科の配点は，表示されているものの $\frac{7}{5}$ です。
7. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

# 数　　学　数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

[1] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい。

[ 問題 ]

次の問いに答えよ。ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ であること，また，$e$ は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

**(1)** 自然数 $n$ に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

**(2)** (1) の 2 つの実数解を $\alpha_n, \beta_n$ $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ。また，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

**[2]** (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{14}$ の定められた場所に記入しなさい。

[ 問題 ]

$\Delta$OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0 < \alpha < 1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ および $\alpha$ を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ で $\cos\theta = \dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\alpha$ を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの $\alpha$ の値を求めよ。

(下書き用紙)

**[ 3 ]** (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{15}}$ の定められた場所に記入しなさい。

[ 問題 ]

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，$a_1 = b_1 = 1$ および，関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n$$
$$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

をみたすものとする。

**(1)** $n \geqq 3$ のとき，$a_n$ は 3 で割り切れるが，$b_n$ は 3 で割り切れないことを示せ。

**(2)** $n \geqq 2$ のとき，$a_n$ と $b_n$ は互いに素であることを示せ。

(下書き用紙)

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{16}}$ の定められた場所に記入しなさい。

[ 問題 ]

関数

$$f(x)=\left|\,\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$$

を考える。 ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$F(a)=\int_0^a f(x)\,f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

**(1)** $f(x)=0$ となる $x$ を求めよ。

**(2)** 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

**(3)** $F(a)$ を求めよ。

(下書き用紙)

[ 5 ] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{17}$ の定められた場所に記入しなさい。

[ 問題 ]

区間 $[a, b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは，

$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば，} \quad a \leqq f(x) \leqq b$$

が成り立つこととする。 $f(x) = 4x(1 - x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

**(1)** 区間 $[0, 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

**(2)** $0 < a < b < 1$ とする。このとき，区間 $[a, b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)