平成19年度入学試験問題

数　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（注 意 事 項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（$\boxed{13}$から$\boxed{17}$まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
6. 経済学部経済工学科の配点は，表示されているものの$\dfrac{7}{5}$です。
7. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

数　　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

[1] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{13}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

$f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$，接線 $y = g(x)$，および 2 直線 $x = 0$，$x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

(下書き用紙)

[2] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 **14** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

p を $0 < p < 1$ を満たす数とし，行列 A, B, C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 A_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$A_1 = A, \quad A_{n+1} = A_n B - B A_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A_2, A_3 を求めよ。

(2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $\Delta_n = a_n d_n - b_n c_n$ とおくとき，$\lim_{n \to \infty} \Delta_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は, 解答紙 $\boxed{15}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

a, b を正の数とし, 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a, -a, b)$, $\mathrm{B}(-a, a, b)$, $\mathrm{C}(a, a, -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α, 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また, 平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき, 線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき, 四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし, P は平面 α 上にはないものとする。

(下書き用紙)

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 **16** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする。これらの数 a, b, c に対して 2 次方程式

$$(*) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

を考える。ただし, さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解をもつとき, 積 ac の取りうる値を求め, 積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし, 一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

(下書き用紙)

[5] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{17}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=|\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2) 自然数 $m,\ n$ に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=0$ が成り立つことを示せ。
また，このとき mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3) $m,\ n$ は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)