平成21年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚($\boxed{13}$ から $\boxed{17}$ まで)です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250点満点です。なお，経済学部経済工学科については，350点満点に換算します。
7. 試験終了後，問題冊子は持ち帰って下さい。

数　　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

[1] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 **13** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標平面に 3 点 O$(0, 0)$，A$(2, 6)$，B$(3, 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) s を定数として，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(下書き用紙)

[**2**] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 **14** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚，「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$,「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1 と p_2 を M，N で表せ。

(2) p_{n+1} を p_n，M，N で表せ。

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。

(4) p_n を n と k で表せ。

(下書き用紙)

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{15}}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b \fallingdotseq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，**(1)** で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

(下書き用紙)

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{16}}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

2 次の列ベクトル X，Y，Z は大きさが 1 であり，$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする。ただし，一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2 + y^2}$ で定義される。また，2 次の正方行列 A が

$$AX = Y, \qquad AY = Z, \qquad AZ = X$$

をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(**1**) $Y \neq -X$ を示せ。

(**2**) Z は $Z = sX + tY$（s，t は実数）の形にただ一通りに表せることを示せ。

(**3**) $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ。

(**4**) 行列 A を求めよ。

(下書き用紙)

[5] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 **17** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

曲線 $y=e^x$ 上を動く点Pの時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ と表し，Pの速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) Pが点 (s, e^s) を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2) Pが点 (s, e^s) を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3) Pが曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

(下書き用紙)