1

（30 点）

円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ)，(ロ)を満たすとする．

(イ)　三角形 ABC は正三角形である．

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p : 1-p$ $(0 < p < 1)$ の比に内分する．

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$p$ を用いて表せ．

2

（35 点）

実数 a は $0 < a \leqq 2$ の範囲を動くものとする．

(1)　$y = \sqrt{x}$ と $y = \dfrac{2}{a}x + 1 - \dfrac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ．

(2)　2 次方程式 $(2x + a - 1)^2 = a^2 x$ の複素数の範囲で考えた 2 つの解を α, β（ただし $|\alpha| \leqq |\beta|$）とする．このとき，$|\beta|$ の最小値を求めよ．

$\boxed{3}$

(30 点)

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{b}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$とする.

(1) 長さ1の空間ベクトル$\vec{c}$に対し

$$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c},\quad \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$$

とおく. このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ.

$$(*)\ \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2) 不等式(＊)を満たす$(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha,\ \beta\leqq\pi)$の範囲を図示せよ.

4

（30 点）

p を素数，a，b を互いに素な正の整数とするとき，$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ．ただし i は虚数単位を表す．

5

（40 点）

数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める．

$$c_n = (n+1)\int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

このとき

(1) c_n と c_{n+2} の関係を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ．

(3) (2)で求めた極限値を c とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c}{c_n-c}$$

を求めよ．

6

(35 点)

n, k は整数で, $n \geqq 2$, $0 \leqq k \leqq 4$ とする. サイコロを n 回投げて出た目の和を5で割ったときの余りが k に等しくなる確率を $p_n(k)$ とする.

(1) $p_{n+1}(0)$, $\cdots$, $p_{n+1}(4)$ を $p_n(0)$, $\cdots$, $p_n(4)$ を用いて表せ.

(2) $p_n(0)$, $\cdots$, $p_n(4)$ の最大値を M_n, 最小値を m_n とするとき次の(イ), (ロ)が成立することを示せ.

(イ) $m_n \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_n$.

(ロ) 任意の k, l $(0 \leqq k,\ l \leqq 4)$ に対し $p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leqq \dfrac{1}{6}(M_n - m_n)$.

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} p_n(k)$ を求めよ.