1

(30 点)

xy 平面上の曲線 $C : y = x^3$ 上の点 P における接線を，P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする．C と L が，相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ．

$\boxed{2}$ （30 点）

未知数 x に関する方程式

$$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + a = 0$$

が，虚軸上の複素数を解に持つような実数 a をすべて求めよ．

3

(35 点)

整数 n に対し $f(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ とおき，$a_n = i^{f(n)}$ と定める．ただし，i は虚数単位を表す．このとき，

$$a_{n+k} = a_n$$

が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ．

4

(30 点)

xyz 空間内の正八面体の頂点 P_1, P_2, ..., P_6 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする．このとき，k と異なるすべての m に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ．

5

（40 点）

p を 2 以上の整数とする．2 以上の整数 n に対し，次の条件(イ)，(ロ)をみたす複素数の組（$z_1, z_2, \ldots, z_n$）の個数を a_n とする．

(イ)　$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ に対し，$z_k^p=1$ かつ，$z_k \neq 1$.

(ロ)　$z_1 z_2 \cdots z_n = 1$.

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_3 を求めよ．

(2)　a_{n+2} を a_n，a_{n+1} の一方または両方を用いて表せ．

(3)　a_n を求めよ．

6 (35 点)

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} \left| \sin nx \right| dx$$