㊮

平成16年度入学試験問題

数　　学（理系）

200点満点

≪配点は，学生募集要項に記載のとおり.≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと.
2. 解答冊子は表紙のほかに16ページある.
3. 問題は全部で6題ある（1ページから2ページ）.
4. 筆答開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙にはこれら以外のことを書いてはならない.
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いてもよい．この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．それ以外の場合，計算用ページは採点の対象としない.
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページに書き，消さないでそのまま残しておくこと.
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある.
8. 解答冊子は，ホッチキスをはずしたりページを切り離したりしてはならない.
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない.

$\boxed{1}$

(30 点)

$$f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2\theta$$

とする．$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ．

$\boxed{2}$

(35 点)

$\alpha > 0$ とし，$x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \left(\frac{e}{x^{\alpha}} - 1\right)\frac{\log x}{x}$$

を考える．$y = f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α であらわせ．

ただし，e は自然対数の底である．

$\boxed{3}$

(35 点)

n を 2 以上の自然数とする．x^{2n} を $x^2 - x + \dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする．すなわち，x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n} = P_n(x)\left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}\right) + a_n x + b_n$$

が成り立っているとする．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

4

(35 点)

行列 A, B を

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

とする. 次の(＊)が成り立つための実数 α, β についての必要十分条件を求めよ.

(＊)　どんな 2 次正方行列 Y に対しても, 2 次正方行列 X で $AX-XB=Y$ となるものがある.

5

(30 点)

複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ であらわす. α を実数ではない複素数とする. 複素平面内の円 C が 1, -1, α を通るならば, C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ.

6

(35 点)

N を自然数とする. $N+1$ 個の箱があり, 1 から $N+1$ までの番号が付いている. どの箱にも玉が 1 個入っている. 番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で, 番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である. 次の操作(＊)を, おのおのの $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1$ に対して, k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う.

(＊)　k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び, その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する. (ただし, N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は, どれも同様に確からしいとする.)

操作がすべて終了した後, 赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ.

問題は, このページで終わりである.