

1

(30 点)

xyz 空間で $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 4)$, $E(3, 0, 4)$, $F(3, 2, 4)$, $G(0, 2, 4)$ を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える. 辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P , 辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく. ただし $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする. D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC (両端を含む) と交わるような s, t のみたす条件を求めよ.

2

(35 点)

平面上の鋭角三角形 $\triangle ABC$ の内部 (辺や頂点は含まない) に点 P をとり, A' を B, C, P を通る円の中心, B' を C, A, P を通る円の中心, C' を A, B, P を通る円の中心とする. このとき A, B, C, A', B', C' が同一円周上にあるための必要十分条件は P が $\triangle ABC$ の内心に一致することであることを示せ.

3

(35 点)

n 枚のカードを積んだ山があり, 各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている. ただし $n \geq 2$ とする. このカードの山に対して次の試行を繰り返す. 1 回の試行では, 一番上のカードを取り, 山の一番上にもどすか, あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う. これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする. n 回の試行を終えたとき, 最初一番下にあったカード (番号 n) が山の一番上にきている確率を求めよ.

4

(35 点)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad - bc = 1$ をみたす行列とする (a, b, c, d は実数). 自

然数 n に対して平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める. $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の長さが 1 のとき, すべての n に対して $\overrightarrow{OP_n}$ の長さが 1 であることを示せ. ここで O は原点である.

5

(30 点)

xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分が始線とする極座標に関して, 極方程式 $r = 2 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) により表される曲線を C とする. C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ.

6

(35 点)

a と b を互いに素, すなわち 1 以外の公約数を持たない正の整数とし, さらに a は奇数とする. 正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ をみたすように定めるとき, 次の(1), (2)を示せ. ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい.

(1) a_2 は奇数であり, a_2 と b_2 は互いに素である.

(2) すべての n に対して, a_n は奇数であり, a_n と b_n は互いに素である.

問題は, このページで終わりである.