

物理問題 I

次の文を読んで、には適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。また、には選択肢から適したものを選び、その番号をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図1は自転車の車輪に取り付けた発電機の配置図である。半径 a [m] の回転子 A が、半径 R [m] の車輪の中心から b [m] の点に接して回転できるようになっている。回転子 A には円柱状の回転磁石 M がつながり、共に同じ角速度で回転することができる。回転磁石 M の側面には4列の N 極と4列の S 極が交互、等間隔に並んでいる。図2はこの発電機の構造の概念図である。同じ方向に N 回ずつ巻かれた、断面積 S [m²]、自己インダクタンス L [H] のコイルが回転磁石 M の左右にそれぞれ1つずつ固定されている。端子1と端子2には、スイッチ K を通じて抵抗値 r [Ω] の電球がつながっている。電球の抵抗値 r [Ω] は常に一定とし、導線の抵

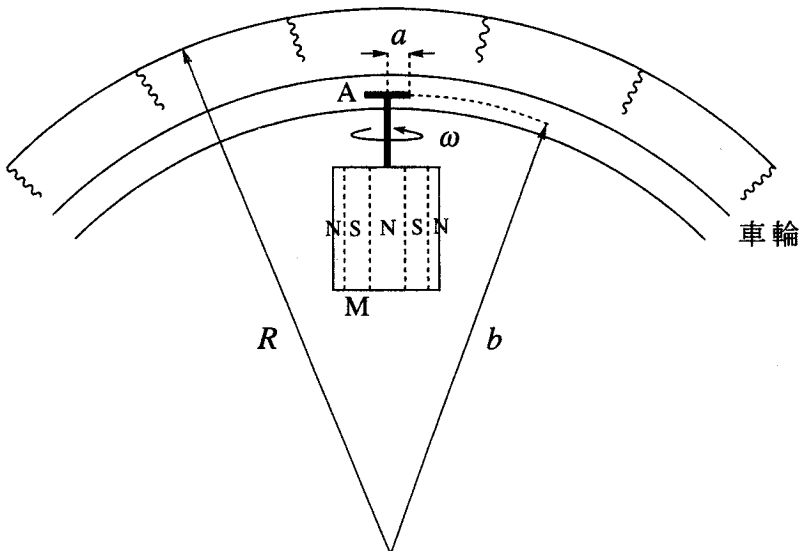


図1

抗は無視できるものとする。

なお、任意の変数 x の微小変化 Δx に対して、 k が定数のとき、

$$\frac{\Delta \sin kx}{\Delta x} = k \cos kx, \quad \frac{\Delta \cos kx}{\Delta x} = -k \sin kx$$

の関係がある。必要に応じてこの関係式を用いてもよい。

この装置が発電機として働くように2つのコイルを直列に接続するためには、**図2**において、**【イ：① 端子3は端子5に接続し、端子4は端子6に接続、② 端子3は端子6に接続し、端子4は端子5に接続】**しなければならない。2つのコイルが正しく接続された状態で、回転子Aが角速度 ω [rad/s] で回転しているとき、各コイルを**図2**の矢印の向きに貫く磁束密度 B [T] が時間 t [s] の周期関数として、 $B = B_0 \cos pt$ と表せるものとする、 $p =$ [rad/s] である。ただし、 $B_0 > 0$ とする。磁束密度の変化の周期は ω を用いて表すと、 [s] となる。

以下の解答においては、 ω と p のいずれを用いても良いが、1つの解答式の中に両者を混在させてはいけない。

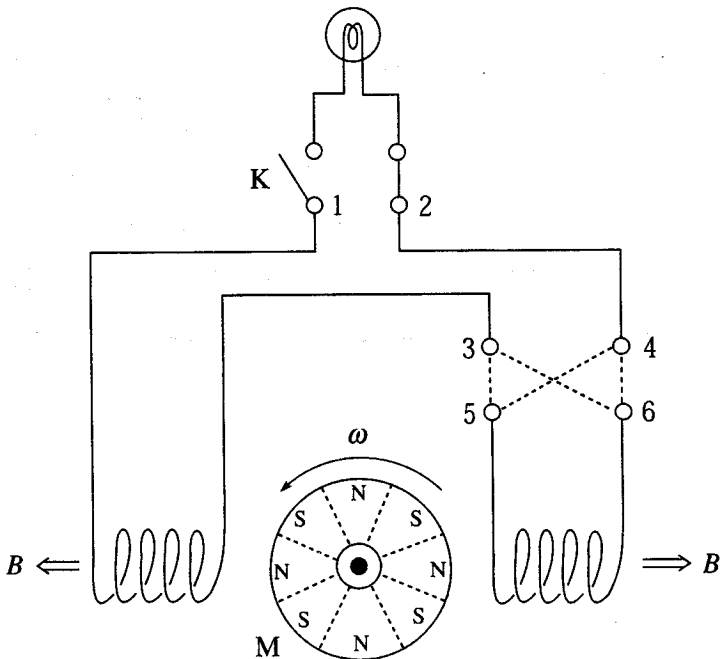


図2

スイッチ K が開いた状態で回転子 A が角速度 ω [rad/s] で回転している場合を考えよう。図 2 に示したように回転磁石の 2 つの N 極がそれぞれコイルの方向を向いた瞬間から、 [s] の間は、端子 1 の電位は端子 2 の電位より【ホ：① 高い、② 低い】。端子 2 に対する端子 1 の電圧は時間と共に変化し、時間 t [s] の関数として [V] と表される。電圧変動の周波数は、 [Hz] である。

次に、スイッチ K が閉じた状態で回転子 A が角速度 ω [rad/s] で回転している場合を考えよう。このとき、この回路は電圧源に自己インダクタンス L [H] の 2 つのコイルと抵抗値 r [Ω] の電球が直列につながった回路と見なすことができる。2 つのコイルを合わせた全体のリアクタンス（インピーダンスとも言う）は、 [Ω] である。交流電流に対するこの回路全体の合成抵抗は、全体のリアクタンスの 2 乗と抵抗の 2 乗の和の平方根で表される。また、電流の位相は電圧の位相より遅れる。この位相の遅れを θ [rad] とすると、電球を端子 1 から端子 2 の向きに流れる電流は [A] と表され、電球で消費される平均電力は [W] となる。

回転子 A が角速度 ω [rad/s] で回転しているとき、回転子 A と車輪、および車輪と地面との間に滑りはないとすると、自転車の速度は [m/s] であり、自転車の速度を速くするとともに電球の消費電力は増大するが、次第に一定値 [W] に近づく。これは、角速度が大きくなるにつれて発電機の起電力は増大するが、同時に自己誘導によってコイルに生じる逆起電力が、【ワ：① 大きくなる、② 小さくなる、③ 一定になる】ためであり、電球はある明るさより明るくはならない。

物理問題 II

次の文を読んで、 には適した式または数値を、それぞれの解答欄に記入せよ。また、{ } には選択肢あるいは選択図（グラフ）から適したものを選び、その番号を解答欄に記入せよ。なお、 はすでに で与えられたものと同じものを表す。

振動数 ν [Hz] の光は、運動量 あ [kg·m/s]、エネルギー い [J] を持つ粒子「光子」の集まりであると考えることができる。ただし、プランク定数を h [J·s]、光の速さを c [m/s] とする。一方、水素原子の内部の電子のエネルギーはとびとびの値をとる。基底状態のエネルギーの値を E_1 [J]、ある励起状態のエネルギーの値を E_2 [J] とし、この2つの状態のみを考えることにする。ただし、 $E_2 - E_1$ [J] は、およそ $h\nu$ [J] に等しいとする。水素原子の速さを V [m/s]、質量を M [kg] としたときの、水素原子の全エネルギーは、 $\left(\frac{V}{c}\right)^2$ が1より十分小さいときには、水素原子の重心運動の運動エネルギー $\left(\frac{1}{2}MV^2$ [J]) と水素原子内部の電子のエネルギー (E_1 [J] または E_2 [J]) の和となる。ただし、水素原子の大きさは無視でき、以下の実験はすべて真空中で行うものとする。

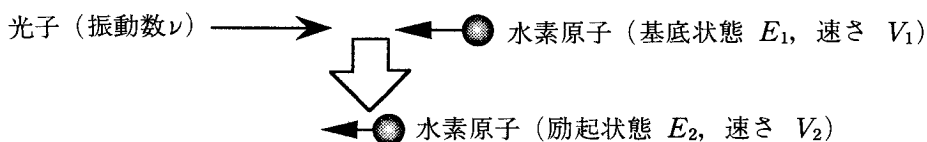


図1

- (1) 図1のように、運動量 あ [kg·m/s] でエネルギー い [J] の光子と、基底状態にあり光と反対向きに速さ V_1 [m/s] で運動している水素原子が1つあったとする。水素原子が光子を吸収し、励起状態に励起され、速さが V_2 [m/s] になった。ただし、水素原子の運動の向きは変わらないとする。このとき、水素原子と光子の全エネルギー保存の式は う となり、また、運動量保存の式は え となる。 う と え から V_2 を消去すると、

$E_2 - E_1 =$ お となる。この条件を満たすときに水素原子は、光子を吸収することができる。この式に現れる $\frac{1}{2M} \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2$ の項は反跳エネルギーと呼ばれ、通常は非常に小さいので無視してよい。したがって、光と反対向きに運動している水素原子は、静止している時に比べて、**【か：① 長い波長，② 短い波長】**の光を吸収することがわかる。

(2) 上では1個の光子の吸収過程を考察したが、今度は、多数個の光子が水素原子の進行方向と逆向きからやってくる場合を考察する。光子を吸収して励起状態に励起された水素原子は、ある時間の後に光子を放出して再び基底状態にもどる。基底状態にもどった水素原子は、対向してやってくる光子を再び吸収することができる。このような光子の吸収・放出の過程を繰り返すことにより水素原子は光から一定の力を受け、減速する。ただし、(1)で考察したように、減速するにつれて水素原子が吸収できる光の波長は変化してしまうが、その変化は小さいので、減速の過程においても水素原子は、速度によらず一定の運動量 あ [kg·m/s] の光子を吸収するものとする。また、励起状態にある水素原子はいろいろな向きに光子を放出するため、多数回の光子の放出過程においては平均として水素原子は力を受けない。したがって、毎秒平均 n 回だけ水素原子が光子の吸収・放出を繰り返すとき、水素原子が受ける平均の力の大きさは、き [N] で表される。したがって、初速度 V_1 [m/s] で運動していた水素原子は等加速度運動をして、距離 く [m] だけ進んで速度0になる。ただし、水素原子の運動は直線運動であるとする。

(3) 通常の高温の気体原子は、高速度の熱運動をしていてその運動に重力の効果を見出すことは難しい。しかし最近、上で考察したように光からの力により原子の速度をほとんど0にまですることができるようになり、このように低速になった原子の運動では重力の影響が支配的になる。水素原子を鉛直上向きに噴水のように打ち上げた場合を考察してみよう。ただし、水素原子の運動は鉛直方向の直線運動のみとする。

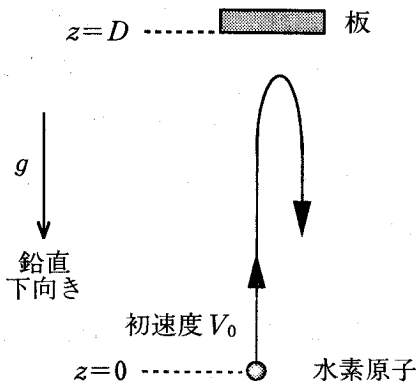
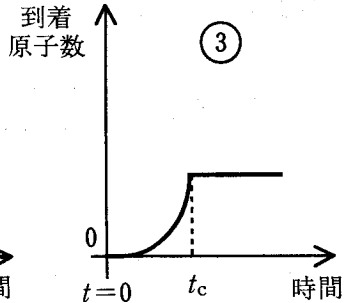
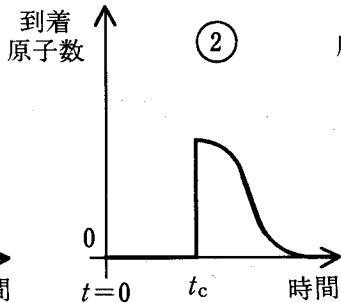
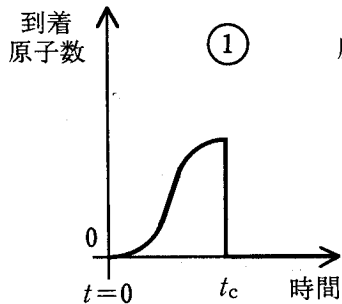


図 2

図 2 のように、水素原子を位置 $z = 0$ で、時刻 $t = 0$ に、鉛直上向きに初速度 V_0 [m/s] で打ち上げると、時刻 け [s] には、再び同じ $z = 0$ の位置にもどってくる。ここで重力加速度を g [m/s²] とする。

さらに、位置 $z = D$ [m] に板を置いておき、そこに水素原子が到着した場合には原子は吸着されてしまうとする。水素原子が再び $z = 0$ の位置にもどることができるためには、水素原子の打ち上げ初速度 V_0 [m/s] は、こ [m/s] 以下でなければならない。

さて、より現実的な状況として、こ [m/s] を中心とした初速度分布をもった水素原子の集まりを考える。この水素原子の集まりを、時刻 $t = 0$ に、位置 $z = 0$ から同時に打ち上げた場合、再び位置 $z = 0$ に到着する水素原子数の時間分布は、【さ：選択図 1 より選択】のようになる。また、この図中の t_c [s] は D 、 g を用いて $t_c =$ し [s] と表される。以上のような実験を行い、 D [m] と t_c [s] に対して、それぞれ、 $D = 1.226$ m、 $t_c = 1.000012$ s という測定値を得た。これから g [m/s²] の値を有効数字の範囲で求めると、す m/s² となる。



選択図 1

物理問題 III

次の文を読んで、 に適した式または数値を、それぞれの解答欄に記入せよ。

質量 m [kg] の単原子分子からなる、温度が T [K]、単位体積あたりの分子数（分子数密度）が n [個/ m^3] の希薄な気体の中に、面積 S [m^2] の小さな円板が静止して置かれている。短い時間 t [s] の間に、分子の衝突によって円板が受ける力積の大きさを考えよう。ここでは、気体は十分希薄であり、円板の付近では分子どうしの衝突は無視できるものとする。以下では、**図 1** のように、円板の中心を原点 O とし、円板に垂直な方向を x 軸にとる（矢印の向きを正とする）。また、議論を簡単にするため、気体分子のうち半数は x 軸の正の向きに一定の速さ v [m/s] で運動しており、残りの半数は x 軸の負の向きに同じく一定の速さ v [m/s] で運動していると仮定し、他の方向の運動は考えないことにしよう。

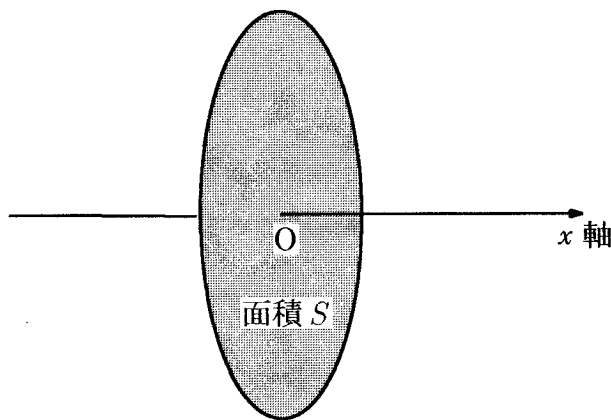


図 1

はじめに、分子数密度が n [個/ m^3] の気体の中に、体積 V [m^3] の小さな領域を考えよう。ここで nV は 1 に比べて十分小さいとする。そうすると、この領域に 2 個以上の分子を見出すことはないので、この領域内に気体分子を見出す確率は nV で与えられる。

これをふまえて、短い時間 t [s] の間に x 軸の正の側から分子が円板に衝突する確率 p_+ を求めよう。 x 軸の負の向きに運動している分子は、円板を底面とし、高さが vt [m] の円柱の中にいれば、時間 t [s] の間に円板に衝突することになるが、 x 軸の負の向きに運動している分子の分子数密度は $\frac{1}{2}n$ [個/m³] であるから、求める確率は、 $p_+ = \boxed{\text{ア}}$ で与えられる。ただし、右辺は 1 に比べて十分小さく、時間 t [s] の間に 2 個以上の分子が円板に衝突することはないとする。あきらかに、時間 t [s] の間に x 軸の負の側から分子が円板に衝突する確率 p_- も同じ式で与えられる。

つぎに、時間 t [s] の間に円板が受ける力積の x 成分 I_x [N·s] および、その 2 乗 I_x^2 [N²·s²] の期待値を考えよう。円板は十分に重く、分子は円板によって弾性的に跳ね返されるとすると、1 つの分子が衝突することにより円板に与える力積の x 成分は、分子が x 軸の正の側から衝突する場合は負、分子が x 軸の負の側から衝突する場合は正であり、その大きさは $\boxed{\text{イ}}$ [N·s] である。時間 t [s] の間に円板に分子が衝突する確率はそれぞれ p_+ 、 p_- であり、しかもそれらは 1 に比べて十分小さいとしているから、 I_x および I_x^2 の期待値は、それぞれ、

$$\overline{I_x} = p_+ \times (-2mv) + p_- \times 2mv + (1 - p_+ - p_-) \times 0,$$

$$\overline{I_x^2} = p_+ \times (-2mv)^2 + p_- \times (2mv)^2 + (1 - p_+ - p_-) \times 0$$

で与えられることがわかる。上で求めた p_+ 、 p_- の式を代入すると、結局、 $\overline{I_x} = \boxed{\text{ウ}}$ [N·s]、 $\overline{I_x^2} = \boxed{\text{エ}}$ [N²·s²] が得られる。

いままでは円板が静止している場合を議論してきたが、円板が v [m/s] に比べて十分遅い速度 u [m/s] で x 軸の正の向きに動いているときには、どうなるか考えてみよう。この場合は、時間 t [s] の間に x 軸の正の側から分子が円板に衝突する確率 p'_+ と、 x 軸の負の側から分子が円板に衝突する確率 p'_- は等しくない。 x 軸の負の向きに運動している分子の、円板に対する相対速度の大きさは $v + u$ [m/s] であるから、時間 t [s] の間に円板に衝突するためには、分子は円板を底面とし、高さが $\boxed{\text{オ}}$ [m] の円柱の中にいればよい。よって、求める確率は、 $p'_+ = \frac{1}{2}nS(v + u)t$ で与えられる。同様に考えると、 $p'_- = \boxed{\text{カ}}$ が得られる。

またこの場合、1つの分子が衝突することにより円板に与える力積の大きさも、分子が x 軸の正の側から衝突するときと、 x 軸の負の側から衝突するときとで異なっている。円板との相対速度を考えればわかるように、1つの分子が円板に与える力積の x 成分は前者のときは、 $-2m(v+u)$ [N·s] であるのに対し、後者のときは、

キ [N·s] である。時間 t [s] の間に円板に分子が衝突する確率はそれぞれ p'_+ 、 p'_- であり、しかもそれらは1に比べて十分小さいとしているので、その間に円板が受ける力積の x 成分 I'_x [N·s] の期待値は、

$$\overline{I'_x} = p'_+ \times \{-2m(v+u)\} + p'_- \times 2m(v-u) + (1-p'_+ - p'_-) \times 0$$

で与えられる。これに上で求めた p'_+ 、 p'_- の式を代入すると、 $\overline{I'_x} =$ **ク** [N·s] が得られるが、いまの場合、これは0ではなく、時間に比例した量になっている。よって、円板が受ける力の x 成分の期待値は $\overline{F_x} = -4nSmvu$ [N] であることがわかる。

以上で得られたことをまとめると、円板が静止している場合は、時間 t [s] の間に円板が受ける力積の2乗の期待値は t に比例しており、 $\overline{I_x^2} = At$ [N²·s²] と書け、円板が速さ u [m/s] で動いている場合は、円板が受ける力の期待値は u に比例しており、 $\overline{F_x} = -Bu$ [N] と書けることがわかった。上で得られた結果から A [N²·s] と B [N·s/m] を求め、その比をとってみると $\frac{A}{B} =$ **ケ** [J] であることがわかる。ここで、一般に温度 T [K] の気体分子の運動エネルギーが、ボルツマン定数 k [J/K] を使って、数係数 \times **コ** [J] と書けることを思い出そう。(数係数とは $\frac{3}{2}$ や2といった数がかかっていることを表す。) 結局、 $\frac{A}{B} =$ 数係数 $\times kT$ [J] と書けることがわかる。力のゆらぎに関する比例係数 A と抵抗力に関する比例係数 B のこのような関係は、ここで議論した簡単な場合のみならず、きわめて一般的に成り立っていることが知られている。