物　　　　　　理　（3問題　100点）

物理問題　I

次の文を読んで，$\boxed{\quad\quad}$ には適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。また，**問1**では指示にしたがって，解答を解答欄に記入せよ。

図1のように，トラックが荷台に荷物を置いた状態で水平面の直線道路上を走る。その速さは**図2**に示すように，時刻0から時刻Tまで一定の割合で増加し，速さvに達する。荷物の大きさは縦，横，高さがそれぞれa，b，hの直方体であり，その質量をmとし，重心位置は荷物の中心にあるものとする。また，トラックの荷台は常に路面と平行であり，荷台と荷物間の静止摩擦係数をμ_0，動摩擦係数をμとし，重力加速度の大きさはgとする。

速さvをある値に定め，加速を停止するまでの時間Tを変化させることによる荷台上の荷物の動きを考察しよう。このとき，走り始めから時刻Tまでの加速度の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ である。

まず，荷物が荷台をすべらないように走行するための条件を考える。時間Tを長くとると荷物はすべらない。その間に荷物が荷台から受ける静止摩擦力は $\boxed{\text{イ}}$ である。Tを短縮していくと荷物はすべり始める。荷物がすべらないためにはTはある値を越えていなければならない。その値をT_1としたとき$T_1 =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

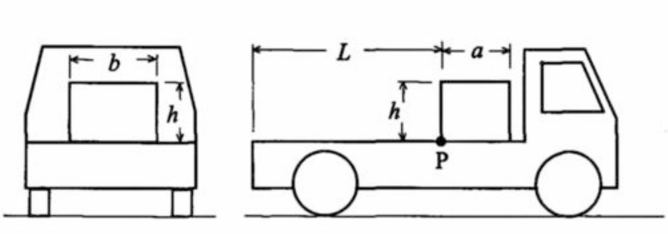


図1

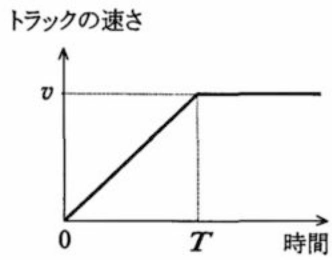


図2

次に，荷物は荷台をすべってもよいが荷台からはみ出さない条件，すなわち荷物が荷台上を動く距離がLを越えない条件を考える。荷物が荷台をすべっているとき，荷物の荷台に対する加速度は走行方向とは逆方向で，その大きさは $\boxed{\text{エ}}$ となる。したがって，時刻Tに至るまでに荷物がすべる距離は $\boxed{\text{オ}}$ となり，時刻Tでの荷物の荷台に対する相対速度の大きさは $\boxed{\text{カ}}$ となる。時刻T以降で，荷物が荷台の上で停止するまでに動く距離は $\boxed{\text{キ}}$ であり，結局 $T \geqq \boxed{\text{ク}}$ の条件が得られる。

次に，荷物がすべらずに転倒する場合を考えよう。ここでは転倒の初期段階として荷物が回転を始める状況を考える。荷物が，Pを通り紙面に垂直な軸を中心として回転を始めないためにはTはある値を越えていなければならない。その値をT_2としたとき，$T_2 = \boxed{\text{ケ}}$ である。

荷物はすべるが回転を始めないための必要条件は，T_1とT_2の表式により，$\dfrac{h}{a} < \boxed{\text{コ}}$ であることがわかる。

この問題は次のページに続いている。

このトラックが図3のように，半径Rの円周上を一定の速さVで走行している場合を考えよう。路面は内側に角度θで傾斜している。なお，Rに比べてトラックおよび荷物は十分小さいと仮定し，荷台面内での荷物の回転も起こらないものとする。

問 1 荷物がすべっていない状況を考える。このとき荷物と荷台との間に静止摩擦力が働かない状態での力の成分を図示し，そのときのトラックの速さ(V_0とする)を求めよ。

トラックがこの円周上を速さ$V > V_0$で走行している場合を考える。その速さがある値を越えると荷物はすべり始める。そのときのトラックの速さは$V = \boxed{\text{サ}}$である。また，転倒の初期段階として荷物の回転を考えた場合，トラックの速さがある値を越えると，荷物はQを通り紙面に垂直な軸を中心として回転を始める。そのときのトラックの速さは$V = \boxed{\text{シ}}$である。したがって，荷物がすべり始めるときのトラックの速さと回転を始めるときのトラックの速さが一致する条件(荷物が回転を始めないための$\dfrac{h}{b}$がとり得る限界値)は$\dfrac{h}{b} = \boxed{\text{ス}}$となる。

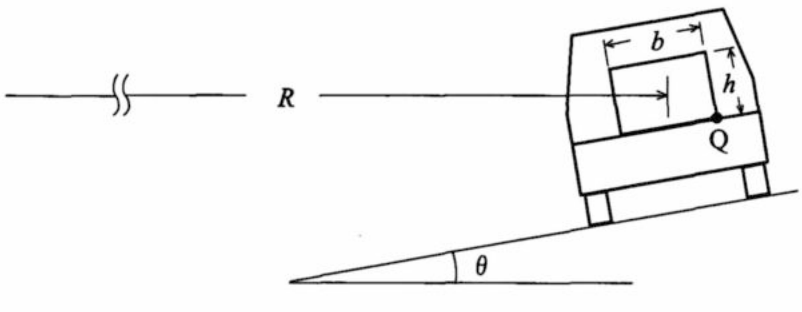


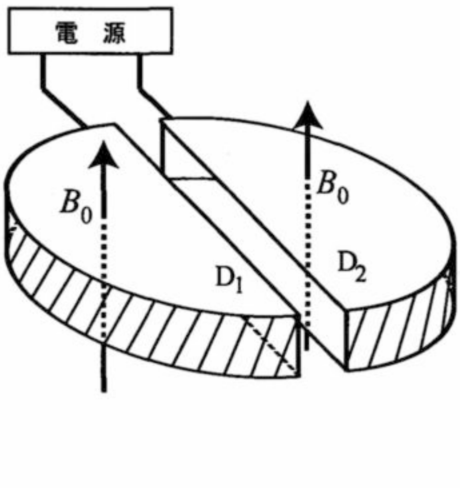
図3

物理問題　II

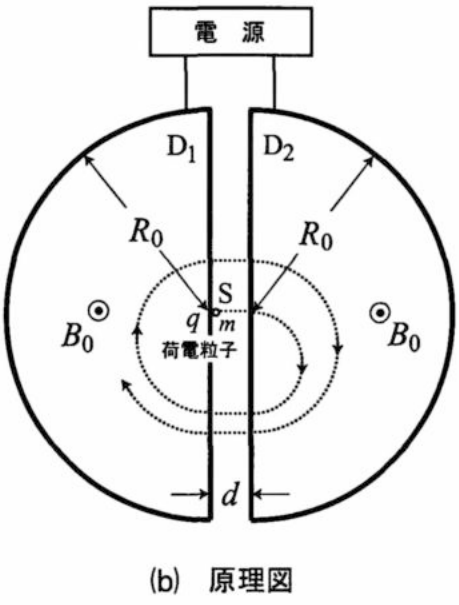
次の文を読んで，$\boxed{}$ には適した式を，$\{\quad\}$ からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，**問1〜問3**では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

荷電粒子にエネルギーを与え加速する装置を加速器と呼ぶ。ある種の加速器では，運動する荷電粒子が磁場中を通るとローレンツ力を受けて曲げられることを利用し，磁場を用いて荷電粒子に円形軌道を描かせながら加速する。このような加速器の原理に関して，以下の問に答えよ。

(1) **図1**に示すものは，その一つでサイクロトロンと呼ばれる装置の**概略図(a)**と**原理図(b)**である。以下，**原理図(b)**にもとづき考察する。真空中に，半径 R_0[m] の半円形で薄い中空の2つの加速電極を，直線部で距離 d[m] だけ離して対向させて置く。ただし，d は R_0 に比べて十分小さいとする。この両電極間のすき間をギャップと呼ぶことにする。この電極面に垂直に紙面奥から手前に磁束密度 B_0[T] の一様磁場を与える。簡単のために，重力は無視でき，ギャップ部の磁場はないと仮定する。



(a)　概略図



(b)　原理図

図1

左側半円電極(D_1)が正極，右側半円電極(D_2)が負極となるよう直流電圧 V[V] がかけられているとき，D_1 の半円の中心部に置いたイオン源Sから電荷 q[C] ($q > 0$)，質量 m[kg] の荷電粒子が初速ゼロで供給された。直流電圧 V による電極間の電場は一様かつ均一であると仮定する。荷電粒子は電極 D_2 に向かって距離 d にわたって加速され，速さ $\boxed{\text{イ}}$ [m/s] で D_2 の空洞内に入り，磁場によってローレンツ力を受ける。これと遠心力がつりあって，荷電粒子は等速で半径 $\boxed{\text{ロ}}$ [m] の円軌道を半周描いた後，電極の直線部に到達し D_2 を出る。荷電粒子が電極空洞内にいる時間は，$\boxed{\text{ハ}}$ [s] である。

この間に電極間電圧を反転させ，D_1 が負極，D_2 が正極となるよう直流電圧 V をかけると，再び荷電粒子はギャップを通過するときに加速され，D_1 の空洞内に入り等速円運動を始める。円運動の周期は，荷電粒子と一様印加磁場が決まれば変化しないので，継続して荷電粒子を加速するためには電極間の直流電圧の向きを変える時間間隔は一定でよい。ただし，両電極間を通過する時間は $\boxed{\text{ハ}}$ に比べて十分短いとする。

これを繰り返すことによって荷電粒子は加速され，描く円軌道の半径はしだいに大きくなる。以下では，この円軌道が半円電極内にある場合を考える。描く軌道半径が R[m] ($R < R_0$) になったとき，荷電粒子の速さは $\boxed{\text{ニ}}$ [m/s] となり，このとき荷電粒子が持つエネルギーは，$\boxed{\text{ホ}}$ [J] である。また，これまでに電極間で加速された回数 n は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

問 1 この後，($n + i$)回目(i = 1，2，3，…)の加速後の軌道半径を R に維持するためには，一様磁場の磁束密度 B[T] と電極間の直流電圧の向きを変える時間間隔 T[s] をそれぞれどのような値にすればよいか。n 回目までの磁束密度 B_0 と時間間隔 T_0[s] を用いて求めよ。ただし，直流電圧の大きさ V は一定とする。

⑵ 円運動する荷電粒子を，軌道半径を変えないで加速する方法として，与える磁場の変化による誘導電場を用いるベータトロンと呼ばれる装置がある。この原理について考えてみよう。

まず図2のように，真空中において，半径 R_a[m]の円柱形の鉄心を持つ電磁石の磁極のすき間に一様磁場を上向きに与えた場合を考える。重力の影響は無視できるとする。初期の磁場の磁束密度は B_0[T]で，その中を図2のように⑴と同じ荷電粒子が半径 r[m]で等速円運動しているとき，荷電粒子の軌道断面を単位時間当たりに通過する電荷量，すなわち電流は， $\boxed{\quad ト \quad}$ [A]と書ける。

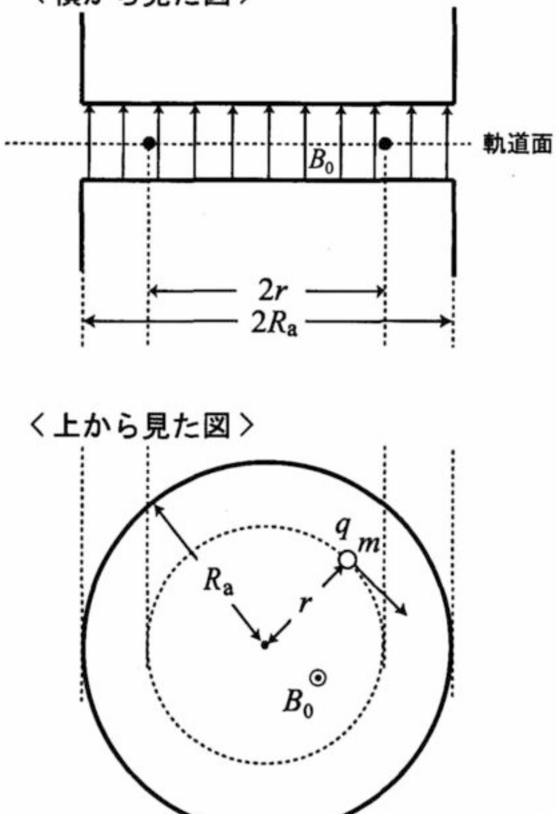


図2

この荷電粒子を加速するために磁場を変化させたとき，荷電粒子に働く力を次のように考えてみよう。磁場変化によって軌道半径が変わらないと仮定すると，この荷電粒子の運動は，その軌道上に置いた半径 r で変形しない抵抗のない円環に流れる電流とみなせる。この電流の大きさは $\boxed{\quad ト \quad}$ である。このように仮定した円環に磁場変化を与えた。磁極間の磁束密度を一様に保ちながら，時間 Δt[s]の間に ΔB[T]だけ均一に増加させると，円環に誘起される起電力は円環を貫く磁束の単位時間当たりの変化で与えられ，その大きさは $\boxed{\quad チ \quad}$ [V]である。そのとき，円環上の電場の大きさは $\boxed{\quad リ \quad}$ [V/m]となり，これによって円環には電流が誘導される。

円環に電流が誘導されるということは，荷電粒子が誘導電場 $\boxed{\quad リ \quad}$ による力を受けて加速されることと等価である。このとき，荷電粒子が受けた力積は荷電粒子の運動量の変化に等しいので，初期の磁束密度 B_0 での速さを考慮すると Δt 後の速さは， $\boxed{\quad ヌ \quad}$ [m/s]となる。荷電粒子に働く中心方向の合力は $\boxed{\quad ル \quad}$ [N]となり，このように磁極間に一様で，均一な磁場変化を与えて荷電粒子を加速

した場合には，軌道半径が$\left\{\right.$ヲ：① 大きくなる ② 変わらない ③ 小さくなる$\left.\right\}$ことがわかる。

実際のベータトロンでは，荷電粒子の軌道半径を変えないで加速するために，磁極間の磁場分布は一様でなく，与える磁場変化も均一にならない工夫をしている。これについて考えてみよう。

問 2 前述と同じ初期の状態から時間 Δt の間に，軌道上の磁束密度を ΔB，軌道で囲まれる面を貫く全磁束を $\Delta \Phi$ [Wb] だけそれぞれ増加させたところ，軌道半径は変わらずに荷電粒子の速さの変化が Δv [m/s] となった。このとき，$\boxed{\text{ル}}$ を導いた場合と同様に，軌道上の荷電粒子の運動量の変化と中心方向の力のつりあいを考えて $\Delta \Phi$ と ΔB の関係式を求めよ。

問 3 上の**問 2** の結果をもとに，実際のベータトロンの磁極の断面形状として**図 3** の(a)，(b)のどちらが適当であるか選べ。図中の磁極間の矢印は磁力線の概略である。磁力線の密度は磁束密度の大きさに対応している。

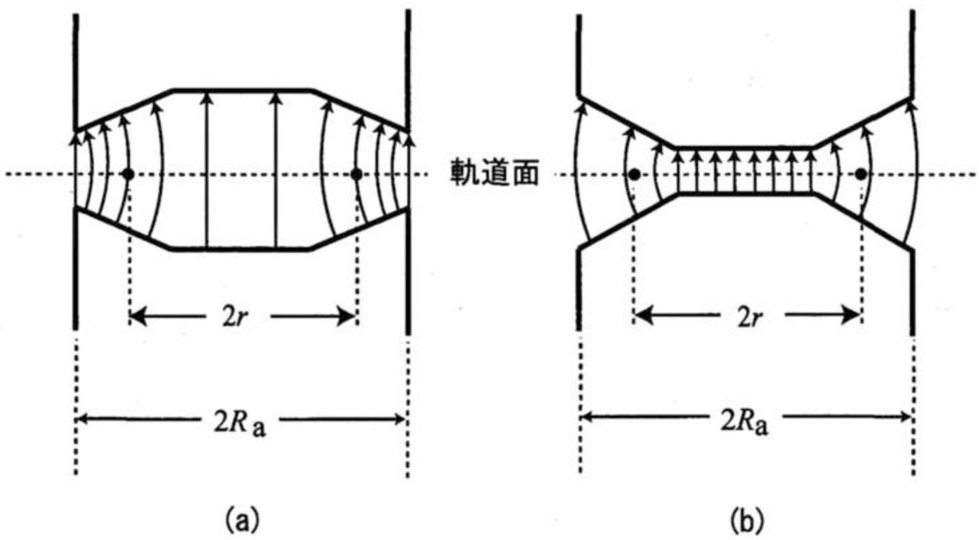


図 3

物理問題　Ⅲ

次の文を読んで，$\boxed{}$ には適した式を，$\{\quad\}$ からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，**問１～問３**では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

(1) ホイヘンスの原理を用いると波の多くの現象が理解できる。**図１**に示すように，媒質１（$Y<0$）を速さ v_1 で進んだ波は，媒質２（$Y>0$）を速さ v_2 で進み屈折を起こす。角度 θ_1 で入射した線分 AB を含む波面上の点 A は時刻 t_0 に境界に到達した。その後時刻 t_S に，点 B は境界上の点 S に達し，点 A は点 C に到達する。この間（$t_0<t<t_\mathrm{S}$）の時刻 t に境界に達する点 P と点 S の間の距離は，時刻 t を用いると $\overline{\mathrm{PS}}(t)=$ $\boxed{\text{あ}}$ である。また時刻 t に境界上の点 P から放射され，時刻 t_S に点 Q で波面 CS に接する素元波の半径は，時刻 t を用いると $\overline{\mathrm{PQ}}(t)=$ $\boxed{\text{い}}$ である。以上から，媒質２の屈折角 θ_2 は，v_1，v_2 を用いると $\sin\theta_2=$ $\boxed{\text{う}}$ となる。

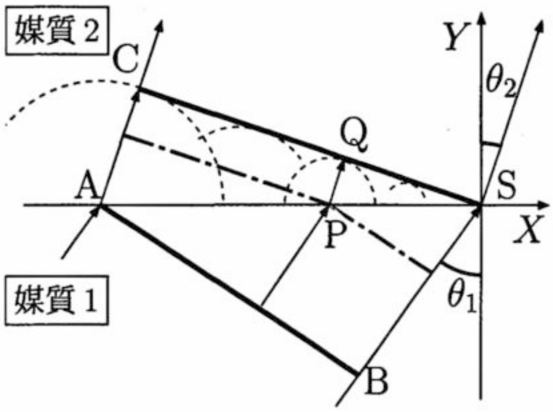


図１

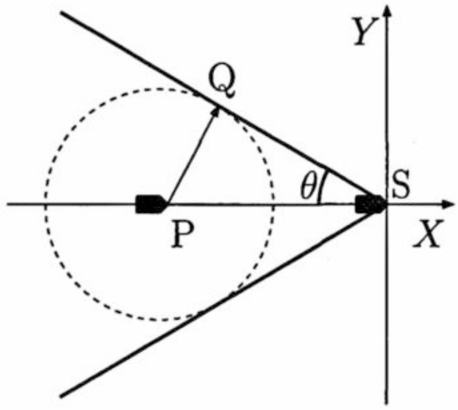


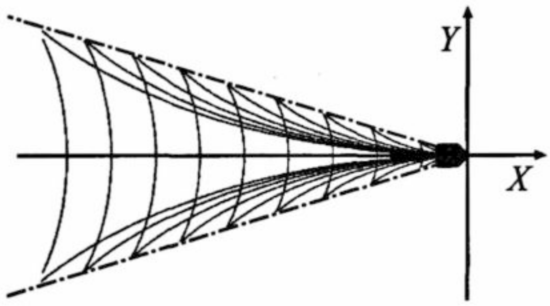
図２

(2) 浅い海の上を進む船は，くさび型の波面を伴う場合がある。(1)の結果を利用して，このくさび型の波面ができる条件を考えよう。船は大きさを持たず，**図２**に示すように，静止した水の上を一定の速さ V で X 軸上を進んで波を発生させたとする。時刻 t での船の位置を点 P とする。また，波の速さは c とする。船は，各時刻に変位が同じ（位相が同じ）である波長 λ の素元波を放射しながら進むとする。

すなわち，図2の点Pから放射される素元波を，図1の点Pから放射される素元波と同様に扱うこととする。時刻t_Sに船が原点Sに到達した。このとき，図2のように，船は後方に原点を通るくさび型の波面を伴っていた。

問 1 波面とX軸がなす角度θに対して$\sin\theta$を求めよ。くさび型の波面ができるときに，船の速さVと波の速さcが満たす条件式を導け。

深い海の上を進む船の後ろにできる美しい波模様は，**参考図**のようにくさび型領域に限られる。このくさび型の領域は，**問 1**の結果とは違って，船の速さにはよらない一定の角度を持つ。この違いは，波長より水深が深い場合には波長が短いほど水の波の速さが遅いという性質があることと，船が作る波は波長の異なる多くの波が重ね合わさっていることが原因である。この違いについて考えよう。



1点鎖線：くさび型領域の境界

参考図

(3) はじめに，平面波の性質を調べよう。x軸の正の方向に進む平面波の波長をλ，振動数をfとする。このとき，時刻t，位置xでの波の変位hは，三角関数を使って$h = a\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft\right)$と書ける。ここで，$a$は平面波の振幅である。ただし，時刻$t = 0$，位置$x = 0$での波の変位を0とおいた。この式に現れる$\frac{2\pi}{\lambda}$は「波数」と呼ばれており，これを$k$とおく。また，角振動数$\omega = 2\pi f$を用いると，次のように表現が簡単になる。

$$h = a\sin(kx - \omega t) \tag{i}$$

座標xと時刻tを固定したときの$kx - \omega t$の値をその位置xと時刻tでの波の位相と呼ぶ。位相が一定の値(θ_0)である位置xは，$kx - \omega t = \theta_0$の関係を満たしながら，x軸の正の方向に一定の速度cで進む。この速度は平面波の「位相速度」と呼ばれている。波数kと角振動数ωを用いて表すと$c = \boxed{\quad え \quad}$となる。

問 2　**図 3** には，式(i)で表される波の時刻 $t = 0$ での変位 h が描かれている。**図 3** を参考にして，時刻 $t = \dfrac{1}{4f}$ におけるこの波の変位 h の概略図を，$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\lambda$ の範囲で解答用紙の所定欄に書き入れよ。ただし，縦軸と横軸の数値と記号は**図 3** と同じように記入せよ。

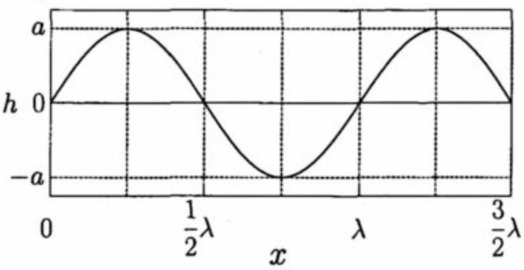


図 3

(4)　次に，波数 k と角振動数 ω がわずかに異なる 2 つの平面波，波 1 と波 2 の重ね合わせを考えよう。波 1 と波 2 の波数を $k_1 = k + \Delta k$，$k_2 = k - \Delta k$，角振動数を $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$，$\omega_2 = \omega - \Delta\omega$ とする。また，波 1 と波 2 の振幅は等しく，a とする。ただし，Δk，$\Delta\omega$ は，それぞれ波数 k，角振動数 ω に比べその大きさが十分小さい定数であり，$\Delta k > 0$ とする。このとき，波 1 の変位を $h_1 = a\sin(k_1x - \omega_1t)$，波 2 の変位を $h_2 = a\sin(k_2x - \omega_2t)$ と表すと，重ね合わせた波の変位 $h = h_1 + h_2$ は，公式 $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\cos B\sin A$ を用いて，以下のように書ける。

$$h = h_1 + h_2 = 2\,a\cos(\boxed{\quad お \quad})\sin(kx - \omega t)$$

重ね合わせた波の変位 h は，平面波の部分 $\sin(kx - \omega t)$ と，その振幅の変動を表す部分 $2\,a\cos(\boxed{\quad お \quad})$ の積になっている。この振幅の変動に着目して式(i)と比べると，この振幅の変動が速度 $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$ で伝わることがわかる。この振幅の変動が伝わる速度を「群速度」と呼び v_G とおく。

図 4 には，重ね合わせた波の変位の時間変化の一例を描いた。ここで，振幅の変動を破線で表し，その腹と節の伝搬を矢印で，また $t = 0$，$x = 0$ における平面波の部分の位相と同じ位相を持つ点の位置を黒丸で，それぞれ示した。**図 4** は，平面波の部分は位相速度 c で伝わり，その振幅の規

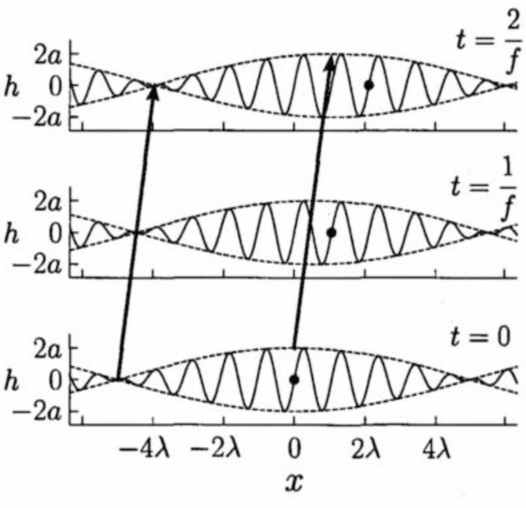


図 4

則的な強弱は群速度 v_G で伝わることを表している。

群速度は波の形やその発展を決めるために重要であると共に，波のかたまりや波のエネルギーの伝搬を理解する上でも重要な物理量である。

波 1 と波 2 の位相速度が等しい場合，位相速度 c と群速度 v_G の関係は $\left\{\right.$**か**：① $c > v_G$　② $c = v_G$　③ $c < v_G\left.\right\}$ である。このとき，$x = 0$ の点で観測される波の変位 h の時間変化を，**図 5** に示す。音のうなりと同じように変位 h の振動の強弱が規則的に観測される。単位時間当たりのうなりの数は角振動数を用いると $\boxed{\quad き \quad}$ である。

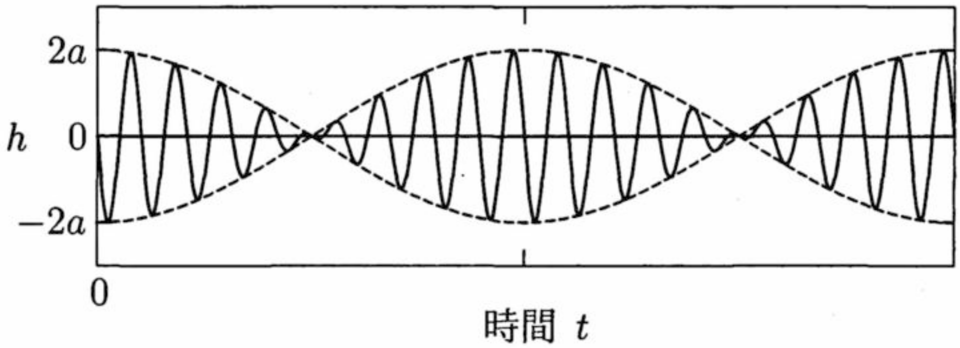


図 5

問 3　船の作る波の波長に比べ水深が十分深い場合，角振動数 ω と波数 k の間には，$\omega = \sqrt{gk}$ の関係が成り立つ。ここで，g は重力加速度の大きさである。このとき，群速度 v_G と位相速度 c をそれぞれ計算し，比 $\dfrac{v_G}{c}$ を求めよ。
必要ならば，$\omega(k) = \alpha\sqrt{k}$ に対する次の近似式を用いよ。

$$\omega(k) \pm \Delta\omega = \omega(k \pm \Delta k) \fallingdotseq \omega(k) \pm \frac{\alpha\Delta k}{2\sqrt{k}}$$

深い海の上を進む船は多くの波長の波を作るので，重ね合わせの結果，振幅の大きな変動は群速度で伝わる。**問 3** で求めた群速度と位相速度の関係から，波の伝わる範囲が狭まることが予想できる。さらに，波長の異なる多数の波の効果を考慮すると**参考図**のような波の模様が作られることを示すことができる。この船の作る波は，ケルビン波と呼ばれる。

物理問題は，このページで終わりである。