$\boxed{1}$ xy 平面上の放物線 $A: y = x^2$, $B: y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき，b を a で表せ。

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a，b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ を満たしながら a，b が変化するとき，線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。

2 z を複素数とし，i を虚数単位とする。

(1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。

(2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

3 曲線 $y = x^2$ ($0 \leqq x \leqq 1$)を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h, 体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

4 点Pは数直線上を原点Oを出発点として，確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$で正の向きに1進み，または負の向きに1進むとする。n回移動したときのPの座標を$X(n)$で表す。

(1) $X(8)=2$となる確率を求めよ。

(2) $|X(7)|$の期待値を求めよ。

(3) Pが6回目の移動が終わった時点で，一度もOに戻っていない確率を求めよ。

5 半径1の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。ひとつの辺ABが x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点Aが x 軸に含まれる状態まで続ける。点Aが描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

(1) $L(6)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \to \infty} L(n)$ を求めよ。

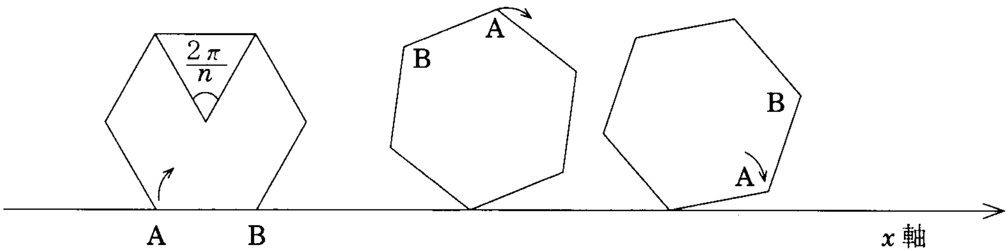

図1

図は $n = 6$ の場合

◇M10(353—117)