

数 学

(理系学部)

12:40~14:40

注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。

2. 問題紙は3ページある。

3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学2-1

(問①用),

解答用紙番号
数学2-2

(問②用),

解答用紙番号
数学2-3

(問③用),

解答用紙番号
数学2-4

(問④用),

解答用紙番号
数学2-5

(問⑤用)の5枚である。

4. 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。

5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。

6. 各問に対する解答は、それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。ただし、裏面を使用してはならない。

7. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。

8. 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

(理 系 学 部)

1 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1$$

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を考える。ただし、 i は虚数単位である。

(1) z_2, z_3 を求めよ。

(2) 上の漸化式を

$$z_{n+1} - \alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \alpha)$$

と表したとき、複素数 α を求めよ。

(3) 一般項 z_n を求めよ。

(4) $z_n = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。

2 A を 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (ただし、 $bc \neq 0$)、 k を実数とする。

行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ について等式

$$XA - AX = kA \cdots \cdots (*)$$

を考える。ただし、行列の成分は、すべて実数とする。

(1) $k = 0$ のとき、 $(*)$ を満たす X は A の実数倍であることを示せ。

(2) $k \neq 0$ のとき、 $(*)$ を満たす X が存在するための必要十分条件は $A^2 = O$ (ただし、 O は零行列)であることを示せ。このとき、 $(*)$ を満たす X で $z = c$ であるものを求めよ。

3 a を 1 以上の実数, b を正の実数とする。

(1) 0 以上のすべての実数 x について, 不等式 $e^x - a(x + 2b) \geq 0$ が成り立つための, a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし, e は自然対数の底とする。

(2) a, b が (1) で求めた範囲を動くとき, 定積分

$$\frac{1}{ae^b} \int_0^1 \frac{1}{x + 2b} dx$$

の値を最小にする a, b と, その最小値を求めよ。

4 a, b を正の実数とする。空間内の 2 点 $A(0, a, 0), B(1, 0, b)$ を通る直線を ℓ とする。直線 ℓ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1) x 座標の値が t であるような直線 ℓ 上の点 P の座標を求めよ。

(2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3) 図形 M と 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

5 ある人がサイコロを振る試行によって, 部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果, 部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え, 部屋 B に居る場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果, 部屋 A, B に居る確率をそれぞれ $P_A(n), P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A に居るものとし(つまり, $P_A(0) = 1, P_B(0) = 0$ とする), 持ち点は 1 とする。

(1) $P_A(1), P_A(2), P_A(3)$ および $P_B(1), P_B(2), P_B(3)$ を求めよ。また, 第 3 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2) $P_A(n+1), P_B(n+1)$ を $P_A(n), P_B(n)$ を用いて表せ。

(3) $P_A(n), P_B(n)$ を n を用いて表せ。

(4) 第 n 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。