

数 学

(理系学部)

12 : 40 ~ 14 : 40

注 意

- 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。
- 問題紙は 3 ページある。
- 解答用紙は

解答用紙番号
数学 2—1

 (問①用),

解答用紙番号
数学 2—2

 (問②用),

解答用紙番号
数学 2—3

 (問③用),

解答用紙番号
数学 2—4

 (問④用),

解答用紙番号
数学 2—5

 (問⑤用)の 5 枚である。
- 解答用紙は 5 枚とも全部必ず提出せよ。
- 受験番号および座席番号(上下 2 箇所)は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
- 各問に対する解答は、それぞれ 3 で指定された解答用紙に記入せよ。ただし、裏面を使用してはならない。
- 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
- 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

(理 系 学 部)

1 次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $e^{2a} - 2e^a - 1 = 0$ を満たす実数 a を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。
- (2) $t \geq 0$ に対して $F(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^x + e^{2t}} dx$ を求めよ。
- (3) $t \geq 0$ の範囲での $F(t)$ の最大値と、最大値を与える t の値を求めよ。

2 x, y は $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を次で定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \cos y & \sin x - \sin y \\ -\sin x + \sin y & \cos x + \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (1) $c_n = a_n^2 + b_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。
- (2) (1) の c_n に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。

3 $f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする。

- (1) 自然数 n, m に対し、 $\int_0^n t^m dt \leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \int_0^n (t+1)^m dt$ を示せ。
- (2) $f(x)$ の次数を r とするとき、次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{r+1}$$

- (3) すべての自然数 n に対して $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

(理 系 学 部)

- 4 複素数 a_n ($n = 1, 2, \dots$) を次のように定める。

$$a_1 = 1 + i, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n - 3}$$

ただし、 i は虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上の 3 点 $0, a_1, a_2$ を通る円の方程式を求めよ。
- (2) すべての a_n は (1) で求めた円上にあることを示せ。

- 5 半径 1 の球に内接する正四面体の一辺の長さを求めよ。