理科系　平成21年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　　学

(情―自然・理・医・工・農)

2月26日(木)　10：00―12：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙1枚，答案紙4枚，数学公式集3枚)である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。
10. 問題4は選択問題である。(A)(B)の2題からなるが，いずれか1題だけを選択し解答するものとする。
   どちらを選択したかを答案紙4の所定の欄に記入せよ。

問 題 紙

1 $a>0$, $b>0$とする。点A$(0,a)$を中心とする半径rの円が，双曲線$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$と2点B(s,t)，C$(-s,t)$で接しているとする。ただし，$s>0$とする。ここで，双曲線と円が点Pで接するとは，Pが双曲線と円の共有点であり，かつ点Pにおける双曲線の接線と点Pにおける円の接線が一致することである。

(1) r，s，tを，aとbを用いて表せ。

(2) △ABCが正三角形となるaとrが存在するようなbの値の範囲を求めよ。

2 関数$f(x)$と$g(\theta)$を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta) \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1) 導関数$g'(\theta)$を求めよ。

(2) $g(\theta)$を求めよ。

(3) $y=g(\theta)$のグラフをかけ。

3 行列$A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$に対して，座標空間の点$\mathrm{P}_n$の座標$(a_n, b_n, c_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$を，

$(a_1, b_1, c_1)=(1,0,0)$，

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix},\quad c_{n+1}=c_n+\sqrt{a_n b_n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める。

(1) A^3を求めよ。

(2) 点P_2，P_3，P_4の座標を求めよ。

(3) 点P_nの座標を求めよ。

問題4は選択問題である。次の(A)(B)のいずれか一方を選択して解答せよ。どちらを選択したかを答案紙4の所定の欄に記入せよ。

4 **(A)** さいころを投げると，1から6までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころをn回$(n=1,2,3,\cdots)$投げるとき，出る目の積の一の位がj $(j=0,1,2,\cdots,9)$となる確率を$p_n(j)$とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$を，$p_n(1)$と$p_n(7)$を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$を求めよ。

(4) $p_n(5)$を求めよ。

4 **(B)** x，yを正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$をみたす組$(x,y)$をすべて求めよ。

(2) pを3以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$をみたす組$(x,y)$のうち，$2x+3y$を最小にする$(x,y)$を求めよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0 ）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図 形 と 式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m : n$ に内分および外分する点：

$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：

$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

（ベクトルと行列）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，$(ad-bc \neq 0)$

（複　　素　　数）

12. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|, \theta = \arg z)$

13. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

14. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α，β のとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α，β，γ のとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　　　　数）

17. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

19. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

20. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

21. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

22. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

23. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

（数　　　　列）

24. 初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + l) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n - 1)d\right\}$，$(l = a + (n - 1)d)$

25. 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，$(r \neq 1)$

26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$

（極　　　　　限）

27. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

28. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　　積　　分）

29. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

30. $x = f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

31. $x = x(t)$，$y = y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

32. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

33. $x = g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$

34. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

35. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

36. $\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

37. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 \quad (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

38. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

39. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順 列・組 合 せ）

40. ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

41. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　　率）

42. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

43. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。