理科系　　平成24年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　　学

(情―自然・理・医・工・農)

2月26日(日)　10：00―12：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙1枚，答案紙4枚，数学公式集3枚)である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

◇M7(672―148)

問 題 紙

1 a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y = x^3 - a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3 - a^2t)$ における C の接線を ℓ とする。ℓ と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を ℓ_1，ℓ_2 とする。ただし，ℓ_1 と ℓ_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。ℓ_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

2 $f_0(x) = xe^x$ として，正の整数 n に対して，

$$f_n(x) = \int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt + f'_{n-1}(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1) $f_1(x)$ を求めよ。

(2) $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x}(at + b)e^t dt$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ。ただし，実数 a，b，c は定数とする。

(3) 正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。

3 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問に答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j + k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n - 1$ 以下の正の整数とする。

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j + k$ となる確率を求めよ。

(2) $X = j$ かつ $Y = j + k$ となる確率を求めよ。

(3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。

4 m，p を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする。

(1) $(x - 1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2) $(p - 1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。

(3) $(p - 1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4) r を正の整数とし，$s = 3^{r-1}m$ とする。$2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点$(x_1,\ y_1)$と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点$(x_1,\ y_1,\ z_1)$と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$(x_1,\ y_1)$における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$(x_1,\ y_1)$における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベクトルと行列）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，$(ad-bc \neq 0)$

◇M7(672—155)

（複　素　数）

12. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

13. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

14. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

15. $x^2 + px + q = 0$の解がα，βのとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$の解がα，β，γのとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　数）

17. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

19. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

20. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

21. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

22. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

23. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

（数　列）

24. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + l) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n - 1)d\right\}$，$(l = a + (n - 1)d)$

25. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，$(r \neq 1)$

26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$

（極　　　限）

27. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

28. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　積　分）

29. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

30. $x = f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

31. $x = x(t)$，$y = y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

32. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

33. $x = g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$

34. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

35. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

36. $\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

37. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2\ (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

38. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

39. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

40. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

41. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（確　　　率）

42. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

43. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。