理科系　平成29年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　学

(情—自然，コン・理・医・工・農)

2月26日(日)　10：00—12：30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙1枚，答案紙4枚，数学公式集3枚)である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問　題　紙

1 　不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C : y = a - 1 - \log x\ (x > 0)$ を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする。このとき，次の問に答えよ。必要があれば，$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を証明なしで使ってよい。

(1)　関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ。

(2)　関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

(3)　関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

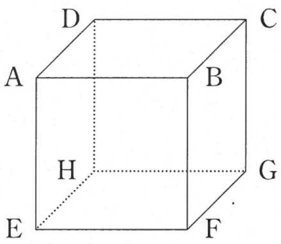
2 　下図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n + 1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。



3 　xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z > 0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a，b，t を使って表せ。

(2)　l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3)　l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

4 　n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件(I)，(II)，(III)を満たしている。

(I)　集合 M は n 個の要素からなる。

(II)　集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(III)　集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である。ただし，$z = w$ の場合も含める。

このとき，次の問に答えよ。

(1)　1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2)　n は偶数であることを示せ。

(3)　$n = 4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。

(4)　$n = 6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m : n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベクトルと行列）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，$(ad-bc \neq 0)$

（複　　素　　数）

12. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，（$r = |z|$，$\theta = \arg z$）

13. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

14. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α，β のとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α，β，γ のとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　　　　数）

17. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

19. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

20. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

21. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

22. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

23. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，（$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$）

（数　　　　列）

24. 初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + l) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n - 1)d\right\}$，（$l = a + (n - 1)d$）

25. 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，（$r \fallingdotseq 1$）

26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$

（極　　　　　　限）

27. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e=2.71828\cdots\cdots$

28. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微　　積　　分）

29. $\left\{f(g(x))\right\}'=f'(g(x))g'(x)$

30. $x=f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

31. $x=x(t)$，$y=y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

32. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\frac{1}{x}$

33. $x=g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)\,dt=\int f(x)\,dx$

34. $\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$

35. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$

36. $\int \log x\,dx=x\log x-x+C$

37. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2\ (a>0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

38. 回転体の体積：$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

39. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x=x(t)$，$y=y(t)$，$a=x(\alpha)$，$b=x(\beta))$

（順 列・組 合 せ）

40. ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

41. $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

（確　　　　　　率）

42. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q=1-p)$

43. 期待値：$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ をみたすとする。