理科系　平成31年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　　学

（情—自然，コン・理・医・工・農）

2月26日(火)　10：00—12：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙1枚，答案紙4枚，数学公式集3枚)である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

◇M7(805—176)

問　題　紙

1　正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする。

(1)　I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3)　xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0,0,1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

2　空間内に $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B，C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B′，C′ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'C}} = 0$ を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{B'AC'} > \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3)　P 上の三角形 AB′C′ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。

3　正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1)　このような n の中で最小のものを求めよ。

(2)　このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

4　正の整数 n に対して $1, 2, \cdots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とする。この $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し，各添字 $i = 1, 2, \cdots, n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \to a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき，

(i)　$a_1 = 2 \to a_2 = 5 \to a_5 = 4 \to a_4 = 1 \to a_1 = 2$

(ii)　$a_3 = 6 \to a_6 = 3 \to a_3 = 6$

(iii)　$a_7 = 7 \to a_7 = 7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(i)，(ii)，(iii)は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている。

(1)　$n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2)　$n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3)　n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ。

(4)　n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。

1　理科系

受	験	番	号	

32 数 学

答 案 紙

受験番号					

1 （解答欄）

2 理科系

受	験	番	号

32 数 学

答 案 紙

受験番号					

2 (解答欄)

3

理科系

受	験	番	号	

32 数 学

答 案 紙

受験番号					

3 (解答欄)

4

理科系

受	験	番	号

32 数 学

答 案 紙

受験番号					

4 (解答欄)

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図 形 と 式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ ク ト ル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

◇M7(805—183)

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2 + px + q = 0$の解がα，βのとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$の解がα，β，γのとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　数）

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

21. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

22. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + l) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n - 1)d\right\}$，$(l = a + (n - 1)d)$

24. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，$(r \neq 1)$

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$

（極　　　　限）

26. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　積　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$のとき$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$のとき$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$のとき$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$

33. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \fallingdotseq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　率）

41. 確率pの事象がn回の試行中r回起る確率：$P_n(r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

42. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし$p_i$は確率変数$X$が値$x_i$をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$をみたすとする。