平成１９年度入学者選抜試験問題

医学部医学科

数　　　　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2　解答用紙４枚と下書き用紙２枚は問題冊子とは別になっています．

3　問題は[1]，[2]，[3]，[4]の４問です．

4　問題の解答を，それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい．

5　試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください．

6　監督者の指示にしたがって，４枚の解答用紙それぞれに学部名と**大学受験番号**を正しく記入しなさい．学部名と**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります．

7　定規は，使用してもかまいません．

8　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください．

[1] c を正の定数とし, 曲線 $y=e^{-cx}$ を考える. ただし, e は自然対数の底とする. 曲線 $y=e^{-cx}$ 上の点

$$\mathrm{P}_1(a_1,\ e^{-ca_1}),\ \mathrm{P}_2(a_2,\ e^{-ca_2}),\ \cdots,\ \mathrm{P}_n(a_n,\ e^{-ca_n}),\ \cdots\cdots$$

を次のようにとる. $a_1=0$ とする. $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し, a_{n+1} を曲線 $y=e^{-cx}$ 上の点 P_n における接線と x 軸 との交点の x 座標とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 曲線 $y=e^{-cx}$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ e^{-ca})$ における接線の方程式を求めよ. さらに, この接線の方程式を $y=g(x)$ とおくとき, すべての実数 x に対して,

$$e^{-cx} \geqq g(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) a_{n+1} を c と n を用いて表せ. さらに, 曲線 $y=e^{-cx}$ と点 P_n における接線および直線 $x=a_{n+1}$ とで囲まれた図形の面積 S_n を求めよ.

(3) (2) で求めた S_n に対し, $A_n=\sum_{k=1}^{n} S_{2k-1}$, $B_n=\sum_{k=1}^{n} S_{2k}$ とする. このとき, 次の極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_n - B_n\right)$$

を求めよ.

[2]　A, B を 2 次の正方行列, E を 2 次の単位行列とする．このとき, 次の各問に答えよ．

(1)　実数 α に対し, $A^2 = \alpha E$ をみたす A をすべて求めよ．

(2)　正の実数 α, 実数 β に対し,

$$A^2 = \alpha E, \quad B^2 = \beta E, \quad AB = -BA$$

をみたす A, B の例を一組あげよ．

(3)　$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とする．負の実数 α に対し,

$$A^2 = \alpha E, \quad AB = -BA$$

をみたす A は存在しないことを示せ．

[3]　$a > 1$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　関数 $f(x) = \log_x a + \log_a x - 2$ （$x > 0$, $x \neq 1$）の増減を調べ，極大値および極小値を求めよ．

(2)　曲線 $y = \log_a x$ （$x > 1$）上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log_a t)$ における接線と x 軸との交点を Q とする．さらに，点 $\mathrm{R}(t,\ 0)$ とする．

(i)　Q の座標および三角形 PQR の面積 $S_1(t)$ を求めよ．

(ii)　曲線 $y = \log_a x$ と P における接線および x 軸で囲まれた図形の面積 $S_2(t)$ を求めよ．

(iii)　次の極限値

$$\lim_{t \to \infty} \frac{S_2(t)}{S_1(t)}$$

を求めよ．

[4]　n を 2 以上の自然数とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　曲線 $y = x^n$ は区間 $(0,\ \infty)$ で下に凸であることを示せ．

(2)　曲線 $y = x^n + x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}$ が区間 $(-\infty,\ \infty)$ で下に凸であれば，n は偶数であることを示せ．

(3)　$a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n + \left(\dfrac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^n$ とするとき，$a_n < \dfrac{2n+1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(4)　(3) の a_n に対して，$a_n > \dfrac{3n+1}{2n+2}$ が成り立つことを示せ．