平成２１年度入学者選抜試験問題

医学部医学科

数　　　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2　解答用紙４枚と下書き用紙２枚は問題冊子とは別になっています．

3　問題は[１]，[２]，[３]，[４]の４問です．

4　問題の解答を，それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい．

5　試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください．

6　監督者の指示にしたがって，４枚の解答用紙それぞれに学部名と**大学受験番号**を正しく記入しなさい．学部名と**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります．

7　定規は，使用してもかまいません．

8　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください．

[**1**] 次の問に答えよ.

(1) 自然数の列が次のように1個, 2個, 3個, 4個, $\cdots$ の数を含む群に分けられている.

$$\left|\ 1\ \right|\ 2\ \ 3\ \left|\ 4\ \ 5\ \ 6\ \right|\ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \left|\ 11\ \ \cdots\right.$$

たとえば, 9は第4群の第3番目の数である. このとき, 次の (i), (ii) に答えよ.

(i) 100は第何群の第何番目の数であるかを求めよ.

(ii) 第 m 群の第 k 番目の数を求めよ.

(2) x 座標, y 座標を自然数とする座標平面上の点の列が, 以下の規則に従って与えられている.

[第 1 段] $\mathrm{A}_1 = (1, 1)$,
[第 2 段] $\mathrm{A}_2 = (2, 1)$, $\mathrm{A}_3 = (1, 2)$,
[第 3 段] $\mathrm{A}_4 = (3, 1)$, $\mathrm{A}_5 = (2, 2)$, $\mathrm{A}_6 = (1, 3)$,
[第 4 段] $\mathrm{A}_7 = (4, 1)$, $\mathrm{A}_8 = (3, 2)$, $\mathrm{A}_9 = (2, 3)$, $\mathrm{A}_{10} = (1, 4)$,
[第 5 段] $\mathrm{A}_{11} = (5, 1)$, $\cdots$
$\vdots$

このとき, 次の (i), (ii) に答えよ.

(i) A_n が第 m 段に入るとき, A_n の座標を m, n で表せ.

(ii) A_n が第 m 段に入るとき, A_1 から A_n までの y 座標の和を m, n で表せ.

[**2**] 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す１次変換を f とする．ただし，$ad-bc \neq 0$ である．放物線 $y=x^2$ 上の点 P の f による像を点 Q とし，Q の f による像を点 R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) Q が x 軸上にあるとき，P の座標を求めよ．

(2) Q がつねに $y=x^2$ 上にあるための条件を a, b, c, d を用いて表せ．

(3) R がつねに $y=x^2$ 上にあり，さらに $a=2$ のとき，$ad-bc$ の値を求めよ．

[**3**] $\log x$ を x の自然対数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $x > -1$ のとき，次の不等式 (I), (II) が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときの x の値を求めよ．

$$(\mathrm{I})\quad \frac{x}{x+1} \leqq \log(1+x)$$

$$(\mathrm{II})\quad \log(1+x) \leqq x$$

(2) $a > 0$ を定数とする．自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k^a}{n^{a+1}}\right)$$

とおくとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{n^a(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^a < S_n < \frac{1}{n^{a+1}}\sum_{k=1}^{n} k^a$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

[4] 確率と期待値について次の問に答えよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

(1) 箱の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが入っている．この中から 1 枚のカードを取り出すとき，書かれている数字が偶数である確率を求めよ．

(2) 2 つの箱の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがそれぞれ入っている．いま 2 つの箱からカードを 1 枚ずつ取り出す．このとき，次の (i), (ii), (iii) に答えよ．

(i) 2 枚のカードに書かれている数字の合計が偶数である確率 P を求めよ．

(ii) 2 枚のカードに書かれている数字の合計が k になる確率 $P(k)$ を求めよ．ただし，$2 \leqq k \leqq 2n$ とする．

(iii) 2 枚のカードに書かれている数字の合計の期待値 E を求めよ．