

1 図のように、水平方向とのなす角 θ のなめらかな斜面 AB 上に、質量の無視できる軽いバネがあり、その下端は点 A に固定されている。点 B より斜め上方の点 C には、固定点 O より長さ L の軽いひもで吊るされた質量 m の小球 P が静止している。重力加速度を g 、空気抵抗および物体の大きさは無視できるものとし、以下の問いに答えよ。なお、運動はすべて同一鉛直平面上で行われる。

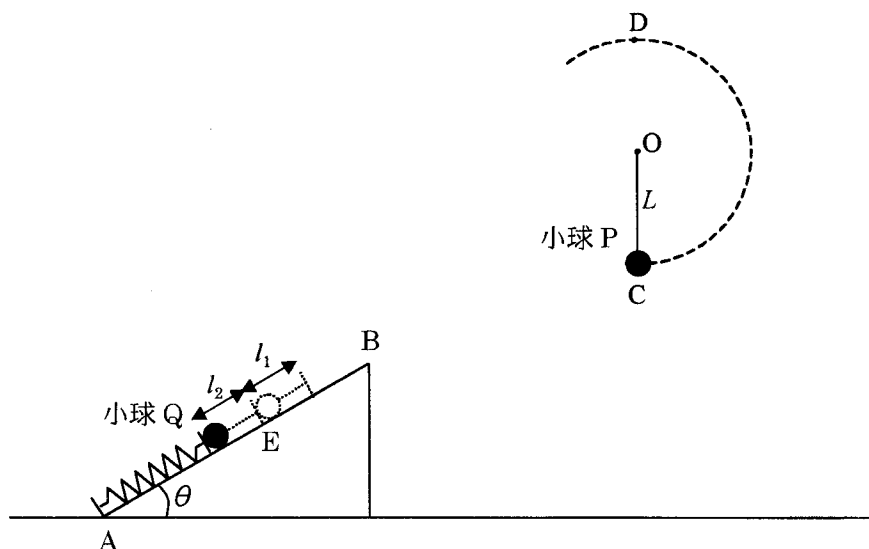
問 1. 小球 P と同じ質量 m の小球 Q を斜面 AB 上のバネの上端に置き、つり合いの位置 E に静止させたとき、バネは自然長から l_1 だけ縮んだ。このバネのバネ定数 k を求めよ。

問 2. さらにこのバネを l_2 だけ縮めたのち、静かに手を離した。小球 Q はバネから打ち出され斜面 AB 上を進んだ。小球 Q がつり合いの位置 E を通過する際の速さ V を、 θ を用いずに表せ。

問 3. 小球 Q は、点 B より速さ V_B で飛び出したとき、放物運動の最高点で小球 P に衝突した。点 B から飛び出してから衝突するまでの時間 t を、 V_B と θ を用いて求めよ。

問 4. 衝突後、小球 P と小球 Q は一体となって点 O を中心とする半径 L の円運動を始めた。衝突前後の力学的エネルギーの変化 ΔE を、符号を明らかにして、 V_B と θ を用いて求めよ。

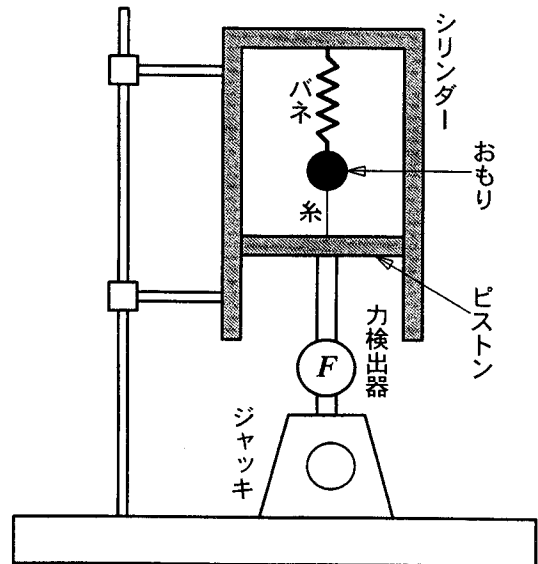
問 5. 小球 P, Q の結合体が、ひもがゆるまずに円運動を保ちながら最高点 D を通過するためには衝突直後の速さ V_C はいくら以上でなければならないか。



2

断熱材で作られたシリンダーおよびピストンからなる容器内に、ある理想気体が満たされている。シリンダーの天井には図に示すように、おもりを付けたバネが鉛直に取り付けられている。おもりの下端は、質量と体積が無視できる細い糸によってピストンの内部面につながれている。シリンダーは丈夫な支柱に固定されており、またピストンの軸は力検出器を介して、支柱の台座の上に置かれたジャッキに連結されている。ピストンの上下位置はジャッキによって調節でき、また力検出器によって、ピストンに作用する力が検出できる。なお、力検出器の目盛りは、検出器の上部に作用する力のうち、ピストンの自重による力を差し引いた値が読み取れるように調整されているものとする。また、検出器は、その上部に下向きに働く力を正の値として表示する。

シリンダーの断面積、すなわちピストンが内部の気体から圧力を受ける面積を $S[\text{m}^2]$ とする。バネはフックの法則に従い、バネ定数 $k[\text{N/m}]$ は温度によらず一定であるものとする。以下の実験中、外部の大気圧力は $P[\text{N/m}^2]$ で一定しており、また、容器の内部と外部とはシリンダーおよびピストンにより完全に断熱されているものとして以下の設問に答えよ。



はじめ糸はたるんだ状態にあり、おもりに働く重力のみによってバネが伸び、つり合っているとする。ピストンの位置を徐々に下げていき、糸がちょうどまっすぐになったところでピストンをいったん止め(このとき、糸の張力は0である)、容器内が熱平衡に達したことを確認して温度を測定したところ $T_0[\text{K}]$ であった。この状態を‘始状態’と命名する。始状態において、容器内の気体の体積は $V_0[\text{m}^3]$ であった。

問 1. 始状態において力検出器が示す力は $F_0[\text{N}]$ であった。容器内の気体の圧力 $p_0[\text{N/m}^2]$ はいくらか、 P , F_0 および S によって表せ。なお、容器内の気体および糸の重量は無視してよい。

問 2. 容器内の気体のモル数 $n[\text{mol}]$ を p_0 , T_0 , V_0 および気体定数 $R[\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})]$ によって表せ。

次に、容器内の熱平衡を常に保ちながらピストンをゆっくり下げていったところ、力検出器が F_1 [N] を表示したとき、おもりとピストンをつないでいた糸が切れたので、この位置でピストンをいったん止めた。糸が切れる直前の容器内の温度は T_1 [K] であった。糸が切れる直前の状態を ‘状態 I’ と命名する。またそのとき、容器内の気体の体積は V_1 [m³] であった。

問 3. 状態 I における容器内の圧力 p_1 [N/m²] と始状態での圧力 p_0 [N/m²] との比 p_1/p_0 を T_0 , V_0 , T_1 および V_1 によって表せ。

問 4. 始状態から糸が切れる直前までにバネが伸びた長さ l [m] はいくらか、 P , p_1 , F_1 , S および k によって表せ。

糸が切れたのち、おもりは減衰しながらしばらく上下に振動し、やがて静止した。そこで、容器内が熱平衡に達したことを確認して温度を測ったところ T_2 [K] であった。この状態を ‘状態 II’ と命名する。

問 5. (a) おもりの振動が静止するに至った主な理由はなにか。

(b) 状態 I から状態 II までの間にバネとおもりからなる振動系が失った力学的エネルギー E [J] はいくらか。

問 6. 状態 II における容器内の温度 T_2 を、状態 I における温度 T_1 、気体のモル数 n 、気体の定積モル比熱 c_v [J/(K·mol)]、バネとおもりを合わせた熱容量 C [J/K]、および振動系が失った力学的エネルギー E を用いて表せ。糸の熱容量と、バネおよびおもりの体積変化による仕事はともに無視してよい。

3 ピンホールカメラ(針穴写真機)は、一様な媒質中を光が (1) する性質を利用した結像装置である。図1のように、暗箱の一方の壁に開けた円形の小さな開口(ピンホール)を通して物体を見ると、物体の各点からの光線がピンホールを通過して (1) した結果、スクリーン上に物体の倒立像が得られる。レンズを必要としないため、レンズ用の材料のない波長域、特にX線用のカメラとして使用されることがある。

十分遠方にある物体上の1点から出た光がスクリーン上に作る光点の大きさは、ピンホールの直径が比較的大きいときには、ピンホール自身の大きさに等しいと考えてよく、ピンホールの直径が小さくなるほど、物体の像は(暗くなるが)鮮明になるはずである。

一方、光は波動としての性質を持っているため、障害物のかげになる部分にもまわりこんで進む。この現象を光の (2) と呼ぶ。(2) の効果は、光の波長が (3) ほど、また、ピンホールの直径が (4) ほど顕著である。このため、ピンホールの直径があまり (4) と、逆に像の鮮明さが損なわれることになる。

物体上の1点から出た光がスクリーン上に作る光の強度分布を求めるためには、ピンホール面上の各点から発生する無数の (5) を、(6) の原理にしたがって合成する必要がある。光の強度はスクリーンまでの距離の違いによって複雑な変化をすることが知られている。

簡単のため、ここでは、ピンホールの直径を a [m]、入射光の波長を λ [m] とするとき、図2に示すように、ピンホールのへりで (2) した光が入射光の進行方向から λ/a [rad] の範囲に一様に広がるものと仮定する。

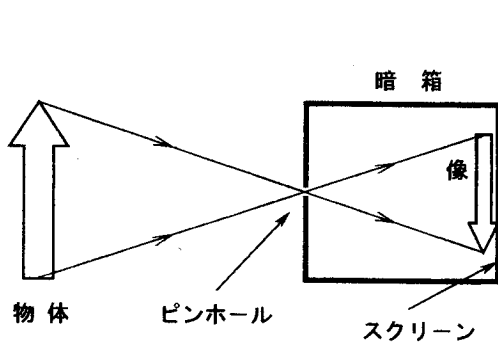


図1

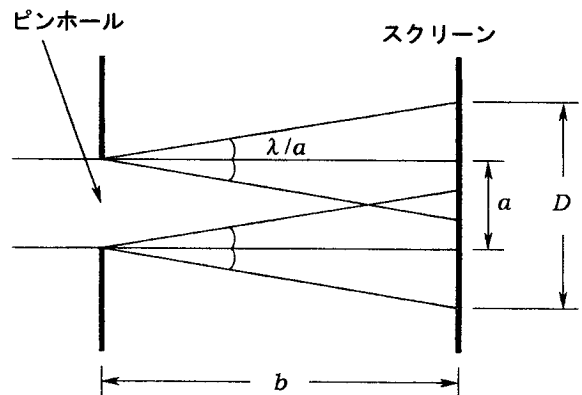


図2

問 1. 本文中の空欄 (1)~(6) に適当な言葉を補って文章を完成せよ。

問 2. 光の波長を λ [m]、ピンホールの直径を a [m]、ピンホールからスクリーンまでの距離を b [m] とするとき、図2のように、カメラの正面の十分遠方にある点光源がスクリーンの中に作る像の直径 D [m] を式に表せ。ただし、 a は λ に比べて十分大きいものとする。

必要があれば、 θ [rad] が十分小さいとき、 $\tan \theta \approx \theta$ の近似を利用してよい。

問 3. ピンホールからスクリーンまでの距離が与えられたとき、最も鮮明な像を与えるピンホールの直径 a_0 [m] を b と λ を使って表せ。また、このときの点光源の像の直径 D_0 [m] を a_0 を使って表せ。

必要があれば、 x の関数 $x + \frac{p}{x}$ (p は正の定数) が $x = \sqrt{p}$ で極小値をとることを利用してよい。

問 4. 光の波長が 0.5×10^{-6} m (緑色光)、ピンホールからスクリーンまでの距離が 0.2 m のとき、像の大きさはピンホール大きさによってどのように変化するか。像の直径 D [m] を縦軸に、ピンホールの直径 a [m] を横軸にとって、概略をグラフに描け。

このとき、最も鮮明な像を与えるピンホールの直径 a_0 [m] はいくらになるか。有効数字 1 桁で求めよ。

計 算 用 余 白

4 磁束密度 B の一様な磁場中で電子を速さ v で磁場に垂直に入射したら、図のように電子は半径 r の円軌道を描いた。以下の問いのうち、カタカナのカッコは言葉、アルファベットのカッコは式で埋めよ。ただし、この装置は真空中で、電子に働く重力は無視できるものとし、電子の電気量を $-e$ 、電子の質量を m とする。

問 1. 電子が円軌道となるのは、磁場から常にこの電子に大きさが(a.)の(イ.)が向心力として働いているからであり、図の場合、磁場の向きは(ロ.)である。

問 2. 磁場中で電子の描く円軌道の半径 r はいくらか。

問 3. 電子の円運動の周期 T を電子の速さ v と軌道半径 r で表せ。また、角速度 ω を B との関係で求めよ。

問 4. 電子の速さ v は、電子銃の加速電圧 V_p によって、初速度 0 の電子を加速して得られたものである。電子の速さはいくらか。また、電圧 V_p を 2 倍に上げると、軌道半径は何倍になるか。

問 5. 磁束密度 $1.0 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$ のとき $2.5 \times 10^2 \text{ V}$ の加速電圧をかけたら、電子の軌道半径として $5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ が測定された。これから電子の比電荷 e/m [C/kg] を有効数字を考慮して求めよ。

問 6. 電子を速さ v で磁場の向きと角 θ をなす向きに斜めに入射した場合は、電子は(ハ.)運動をする。なぜなら、磁場に垂直な方向に働く力(b.)と磁場に平行な方向の速度成分(c.)のためである。このとき、電子が一回転する間に磁場方向へ進む距離は(d.)である。

