

1 図に示すように、長さ l の糸に結びつけられた質量 m の小石が固定点 O を中心に鉛直面内で円運動することができる。小石の運動の開始位置は点 O の真上の点 A で、この位置で水平方向に初速度 v_0 を与えることができるように工夫されている。円の最下点を B とする。また、線分 OA と糸のなす角度が θ のときの小石の位置を P 、速さを v で表す。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。ただし、糸の質量および空気の抵抗は無視できるものとする。

問 1. 小石が点 P に来た時点の糸の張力 S を m 、 l 、 θ 、 v および g を用いて表せ。

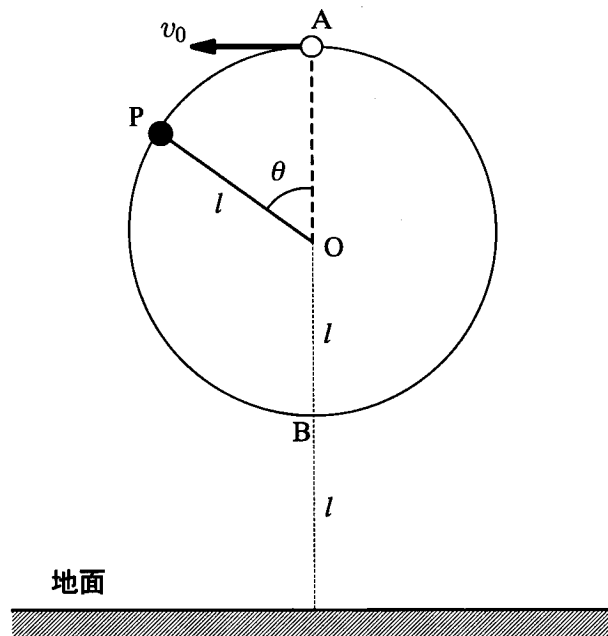
問 2. 初速度 v_0 と点 P における速さ v との間になりたつ関係を式で表せ。

問 3. 小石が点 P に来た時点の糸の張力 S を、 v を含まない式で表せ。

問 4. 運動の間に糸がたるむことなく小石が円軌道を描くために必要な初速度 v_0 の最小値を求めよ。

問 5. 小石の重さの 10 倍に相当する力で引っ張るとちょうど切れる糸を使った場合、小石が最下点 B に来た時点で糸が切れたとする。この場合の初速度 v_0 を求めよ。

問 6. 問 5 で、ちょうど最下点 B で糸が切れたのち、小石が地面に落下するまでに飛ぶ水平距離を求めよ。ただし、回転中心 O は地面から $2l$ の高さにあるものとする。



2 図1に示すように、鉛直上向きに流れる十分に長い直線電流 I と、それが含まれる平面内に電流と平行に2本の金属製ガイド G_a, G_b が置かれ、それらの下端部 D, E には電気抵抗 R が接続されている。そして、両端 A, B でガイドに接する直線状の導体 C が水平を保って上向きに速度 v で移動している。導体 C の延長線が電流の直線と交わる点を O 、点 O から A までの距離を a 、 B までの距離を b (ただし、 $a < b$) とする。電気素量を e 、実験が行われる空間の透磁率を μ 、円周率を π で表す。

以下の文中の にあてはまる式、記号、あるいは文字を解答欄に記入せよ。なお、力や磁場(磁界)などの向きに関する問については、図1における上、下、左、右のいずれか、あるいは紙面表から裏への向きを表す記号 \otimes またはその逆を表す \odot を用いて答えよ。

直線電流 I は、点 O から距離 r にある導体 C 上の点 P に大きさが $\frac{\mu I}{2\pi r}$ に等しく方向は ア 向きの磁束密度をもつ磁場をつくるから、点 P に位置する1個の電子には大きさが イ の力が ウ 向きに作用する。このような力を エ という。いいかえると、導体 C の点 P の位置には、大きさが オ で カ 向きの電場(電界)が存在する。この電場の中を1個の電子が点 A から B まで運ばれるとき、電場によりなされる仕事の大きさと AB 間の電位差を以下のように求めてみよう。

図2に示すように、 AB 間を多数の点 $P_0(=A), P_1, P_2, \dots, P_n(=B)$ によってきわめて短い区間に分け、各点の O からの距離を $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$ とする。ただし、 $r_0 = a, r_n = b$ である。電子が $P_{i-1}P_i$ 間の位置で受ける力は P_{i-1} において受ける力 キ にほぼ等しいから、電子が P_{i-1} から P_i まで運ばれるときなされる仕事の大きさ w_i は $w_i =$ ク としてよい。ここで、 $r_i \doteq r_{i-1}$ のとき近似的に成りたつ関係 $\log_e r_i - \log_e r_{i-1} \doteq \frac{r_i}{r_{i-1}} - 1$ を利用して w_i の表現を書きなると $w_i =$ ケ となる。なお、 \log_e は $e = 2.718\dots$ を底とする対数、すなわち自然対数を表す。すべての分割区間 ($i=1, 2, 3, \dots, n$) にわたって w_i を加え合わせれば、電子が A から B まで運ばれるときなされる仕事の大きさ W が求められる。 r_0 と r_n の代わりに a, b を用いてその結果を表せば、 $W =$ コ となる。一方、 AB 間で電子になされる仕事の大きさ W と AB 間の電位差 V との関係は $W =$ サ であるから、 V を I, v, μ, a, b および π によって表すと $V =$ シ となる。

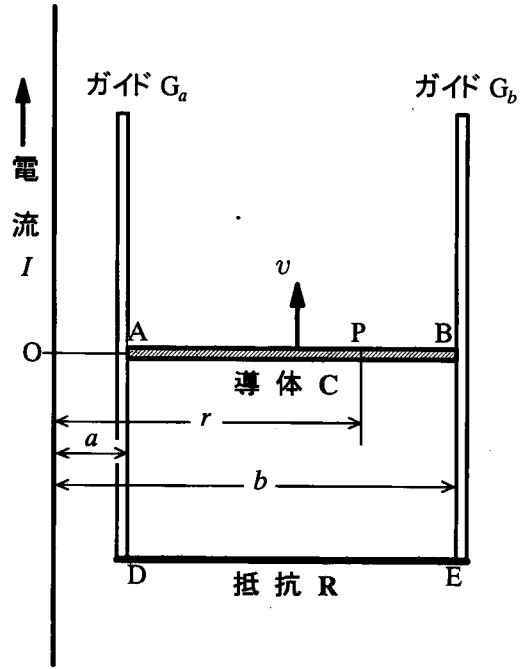


図 1

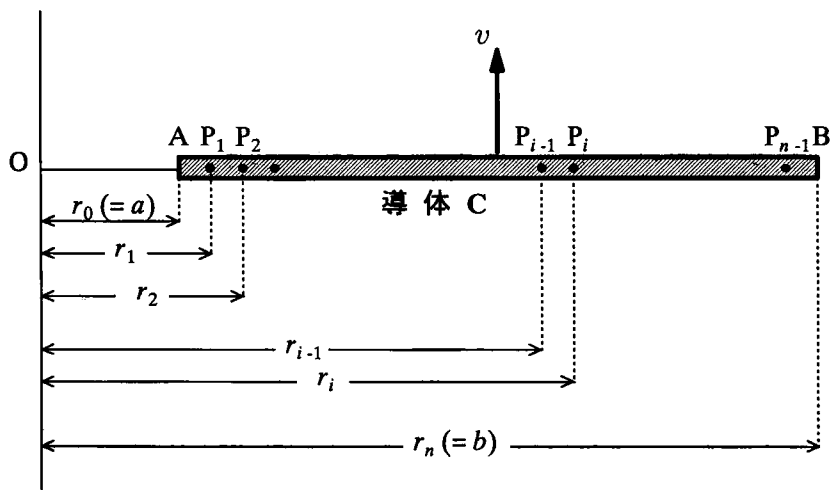


図 2

3 電車が警笛を鳴らしながら目の前を通り過ぎていくとき、その警笛の音の高さは電車が静止しているときに聞く音に比べて、近づくときにはより 聞こえ、遠ざかるときはその逆である。このような現象を音波の という。

さて、図のように、点Pの位置に静止している観測者の前を、振動数 f_0 の音波を発する音源を備えた超高速列車が直線軌道を音速 V より遅い速さ v で通過していく場合を考える。点Pと軌道までの距離を l として以下の問に答えよ。

問 1. 文中の にあてはまることばを解答欄に記入せよ。

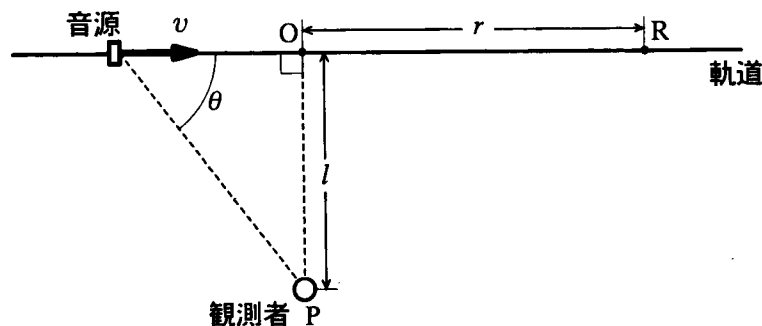
問 2. 音源と点Pを結ぶ直線と列車の進行方向とのなす角度が θ の地点で音源が発した音波を観測者が観測したところ、その振動数は f であった。 f を f_0 、 V 、 v および θ を用いて表せ。

問 3. 音源の速さ v が音速 V の2分の1である場合に、音源が $\theta = 60^\circ$ の地点で発した音波を観測者が観測すると、その振動数は f_1 であった。 f_1 を f_0 を用いて表せ。

問 4. 問3と同様に $v = \frac{1}{2}V$ である場合に、音源が観測者の正面(点Oの位置)で発した音波を観測者が受けた瞬間に、観測者はその受けた音波と同じ振動数 f_2 の音波を送り返した。 f_2 を f_0 を用いて表せ。

問 5. 問4で観測者が送った音波は、音源が点Oから距離 r だけ離れた点Rの位置に達したときに音源に届いた。距離 r を l を用いて表せ。

問 6. 問4で観測者が送った音波を、移動する列車上の音源の位置に置かれた測定器により、点Rの位置を通過するとき観測したところ、その振動数は f_3 であった。 f_3 を f_2 を用いて表せ。



4 気体の状態変化に関する以下の文章を読み、 にあてはまる式または数値を、また {…, …} の部分は正しいほうを選び、解答欄に記入せよ。

A) 気体の状態変化にともなう内部エネルギーの変化を考えてみよう。一般に、外界から気体を与えた熱量を Q 、外界から気体に加えた仕事を W とすると、気体の内部エネルギーの増加量 ΔU は、熱力学第 1 法則によれば

$$\Delta U = \text{ア} \quad (1)$$

で表される。一定の圧力 p のもとで体積 V が ΔV だけゆっくりと増加するとき、気体には外界から $W = \text{イ}$ だけの仕事に加えられるから、式(1)は圧力 p を用いて

$$\Delta U = \text{ウ} \quad (2)$$

とも表される。

B) 定積モル比熱 C_V とは、1 mol の物質を体積 V を一定に保ったまま 1 K だけ温めるのに要する熱量として定義される。いま、体積を一定に保った 1 mol の気体に Q の熱を加えたところ、温度が ΔT だけ上昇したとすれば、 C_V はその定義から Q を用いて

$$C_V = \text{エ} \quad (3)$$

と表される。定積変化では $W = \text{オ}$ であることから、 ΔU は C_V を用いて

$$\Delta U = \text{カ} \quad (4)$$

と表されることがわかる。この式は、気体の温度変化と内部エネルギーの変化量との関係を表すもので、理想気体では定積変化だけではなく、どのような変化においても成立する関係であることが知られている。

C) 外界との間で熱の出入りがいっさい生じない条件のもとで起こる状態変化は断熱変化と呼ばれる。温度 T 、圧力 p の理想気体 1 mol の体積 V を断熱的に ΔV だけ増加させるとどのような温度変化が起こるか考察してみよう。断熱変化では $Q = \text{キ}$ であるから、このとき生じた内部エネルギーの変化量 ΔU は式(2)より

$$\Delta U = \text{ク} \quad (5)$$

となる。このとき生じた温度変化 ΔT を式(4)を用い、圧力 p を含む式で書き直すと

$$\Delta T = \text{ケ} \quad (6)$$

となる。単原子分子からなる理想気体では C_V は気体定数 R を用いて $C_V = \frac{3}{2} R$ であるから、状態方程式を利用して p と R を消去すれば、体積が ΔV だけ増加したときの温度変化 ΔT は

$$\Delta T = \text{コ} \quad (7)$$

と求められる。

D) この式(7)の意味を考えてみよう。断熱変化で気体が圧縮されると、気体が外部から受け取る力学的エネルギーの符号は{正, 負}であり、内部エネルギーが{増加, 減少}し、したがって気体の温度が{高く, 低く}なることを物語っている。断熱変化は熱の出入りをさせることなく気体を温めたり冷やしたりすることができる過程で、冷凍機はこの原理を利用したものである。たとえば、400 Kの単原子分子からなる理想気体の体積を6%だけ断熱的に膨張させたときには、上の考察から、気体の温度は有効数字3桁で セ Kになることがわかる。

—— 計算用余白 ——