

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。ただし, a, b, c は実数で, $a^2 + bc = 1$,

$b \neq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) ある実数 k に対して, $A^2 + A - E = kA$ が成り立つことを示せ。

(2) x, y を実数とし, $P = xA + yE$ とおく。 P が $P^2 + P - E = A$ を満たすような実数の組 (x, y) をすべて求めよ。

2. 関数 $f(x) = \int_0^x \frac{x}{1+t^2} dt$ について、次の問いに答えよ。

(1) 第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) 導関数 $f'(x)$ において、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ だけに限ることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ の最小値、および最小値を与える x の値を求めよ。

3. n を自然数, a を正の実数とし, 曲線 $C: y = \frac{1}{a}x^{n+1} - x$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積が $\frac{1}{2}$ となるとき, a を n を用いて表せ。

(2) (1)で求めた a を第 n 項 a_n とする数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ を考える。

$b_n = a_{2n}$ で定義される数列 $\{b_n\}$ および $c_n = a_{2n-1}$ で定義される数列 $\{c_n\}$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ。ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ は用いてよい。

4. 点 O を原点とする空間内に 3 点 $A(2, 1, 2)$, $B(6, 2, 2)$, $C(5, 7, 5)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) C から直線 OA に垂線を引き、交点を H とする。 H の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた H に対して、平面 OAB 上にあり、 $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{OH}$, $DH = CH$ となる点 D の座標をすべて求めよ。

(3) 点 P が直線 OA 上を動くとき、 $BP + CP$ を最小にする P の座標を求めよ。