

# 旭川医科大学

平成 25 年度一般入試前期日程

## 数 学 問 題 紙

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、2 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙、草案紙は持ち帰りなさい。

**問題 1**  $x, y, z, p$  は自然数で

$$xy + yz + zx = pxyz, \quad x \leq y \leq z \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

問 1  $p \leq 3$  を示せ。

問 2 ①を満たす自然数の組  $(p, x, y, z)$  をすべて求めよ。

**問題 2**  $a$  を正の実数とする。双曲線  $C: x^2 - a^2 y^2 + a^2 = 0$  上の 4 点  $A_1(0, 1)$ ,  $A_2(0, -1)$ ,  $A_3(a, \sqrt{2})$ ,  $A_4(-2a, -\sqrt{5})$  が与えられている。  $A_1$  における  $C$  の接線を  $l_1$ ,  $A_3$  における  $C$  の接線を  $l_3$  とする。次の問いに答えよ。

問 1  $l_1$  と  $l_3$  の交点  $S$  の座標を求めよ。

問 2 直線  $A_1A_2$  と直線  $A_3A_4$  の交点  $U$  の座標, および直線  $A_1A_4$  と直線  $A_2A_3$  の交点  $V$  の座標を求めよ。

問 3 3 点  $S, U, V$  が同一直線上にあることを示せ。

**問題 3**  $a$  を正の実数とし,  $f(x) = e^{-x} \sin ax$  とおくと, 次の問いに答えよ.

問 1  $n$  を自然数とする. 曲線  $y = f(x)$   $\left( \frac{2(n-1)\pi}{a} \leq x \leq \frac{2n\pi}{a} \right)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を  $A_n$  で表すとき,  $A_n$  を  $a$  と  $n$  を用いて表せ.

問 2  $S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$  を  $a$  を用いて表せ.

問 3  $\lim_{a \rightarrow \infty} S$  を求めよ.

**問題 4** 次の問いに答えよ.

問 1 関数  $y = x \log x - x$  ( $x > 0$ ) の増減を調べ, そのグラフをかけ.

問 2  $a$  を正の実数とする. 曲線  $C : y = \log(x+1)$  上の点  $(t, \log(t+1))$  における接線  $l_t$  が, 曲線  $C_a : y = a \log x$  上の点  $(s, a \log s)$  における接線にもなっているとき,  $t$  と  $s$  の関係を  $a$  を含まない式で表せ.

問 3 任意に与えられた  $t > -1$  に対して, 直線  $l_t$  が曲線  $C_a$  の接線にもなっているような  $a$  が唯一つ存在すること, および  $a > 1$  であることを示せ.

問 4 直線  $l_t$  が曲線  $C_a$  の接線になっているとき, その接点の  $x$  座標を  $s(t)$  とかくことにする.  $s(t)$  を  $t$  の関数とみて増減を調べ, さらに  $\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t) - t)$  を求めよ.