第　1　問

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$, $\mathrm{BC} = 2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

第　2　問

複素数平面上の原点以外の相異なる2点 $\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を考える。$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を $\mathrm{R}(w)$ とする。ただし，複素数 γ が表す点Cを $\mathrm{C}(\gamma)$ とかく。このとき，

「$w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである。」

を示せ。

第　3　問

$a > 0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0 \leqq x \leqq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{0,\ \frac{a}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}a,\ a\right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0) = c, \\ \dfrac{f_n((k+1)h) - f_n(kh)}{h} = \{1 - f_n(kh)\}\, f_n((k+1)h) \end{cases}$$

$$(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

ただし，$h = \dfrac{a}{n}$，$c > 0$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$p_k = \dfrac{1}{f_n(kh)}$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とおいて p_k を求めよ。

(2)　$g(a) = \lim_{n \to \infty} f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3)　$c = 2,\ 1,\ \dfrac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y = g(x)$ の $x > 0$ でのグラフをかけ。

第　4　問

座標平面上を運動する 3 点 P, Q, R があり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P}:\ x = \cos t, \qquad y = \sin t$$

$$\mathrm{Q}:\ x = 1 - vt, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{R}:\ x = 1 - vt, \qquad y = 1$$

ただし，v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。

(2)　点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。

第　5　問

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字はたがいに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない。」

ただし，S の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は S に含まれるとする。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2)　小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。

第　6　問

(1)　a，b，cを正の実数とするとき，

$$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & b\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & x\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & z\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

を満たす実数x，y，zをa，b，cで表せ。

(2)　a，b，cが$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 2$，$1 \leqq c \leqq 2$の範囲を動くとき，(1)のx，y，zを座標とする点（x，y，z）が描く立体をKとする。立体Kを平面$y = t$で切った切り口の面積を求めよ。

(3)　この立体Kの体積を求めよ。