第　1　問

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$AB = \sqrt{3}$，$AC = AD = BC = BD = CD = 2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

第　2　問

次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a，b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y)\,dy + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\,dy + \sin x + \cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

第　3　問

実数 $t > 1$ に対し，xy 平面上の点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{P}(1,\ 1),\ \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP，OQ と双曲線 $xy = 1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと，関数 $c(t)$ は $t > 1$ においてつねに減少することを示せ。

第　4　問

複素数平面上の点 a_1, $a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n = 1, \ 2, \cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \ (n = 1, \ 2, \cdots)$$

とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1)　3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2)　すべての点 b_n $(n = 1, \ 2, \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

第　5　問

容量1リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m \geqq 4$ で空（から）のビーカーは無い。入っている水の総量は1リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき，水の入っているビーカーが2個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a)　入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。

(b)　さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。

(c)　次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1)　$x < \dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2)　$x > \dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。

第　6　問

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある2点A，Bを次のように動かす。

表が出た場合：点Aの座標が点Bの座標より大きいときは，AとBを共に正の方向に1動かす。そうでないときは，Aのみ正の方向に1動かす。

裏が出た場合：点Bの座標が点Aの座標より大きいときは，AとBを共に正の方向に1動かす。そうでないときは，Bのみ正の方向に1動かす。

最初2点A，Bは原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返してAとBを動かしていった結果，A，Bの到達した点の座標をそれぞれ a，b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2)　X_n を求めよ。

(3)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。