

第 1 問

2つの放物線

$$y = 2\sqrt{3} (x - \cos \theta)^2 + \sin \theta$$

$$y = -2\sqrt{3} (x + \cos \theta)^2 - \sin \theta$$

が相異なる2点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。

第 2 問

n は正の整数とする。 x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを

$$a_n x + b_n$$

とおく。

(1) 数列 $a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, a_n, b_n は共に正の整数で, 互いに素であることを証明せよ。

第 3 問

xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とし、点 $A(0, 0, -1)$ を通る球面を S とする。 S の外側にある点 $P(x, y, z)$ に対し、 OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下した垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき、

$$PQ \leq AR$$

であるような点 P の動く範囲 V を求め、 V の体積は 10 より小さいことを示せ。

第 4 問

a は正の実数とする。 xy 平面の y 軸上に点 $P(0, a)$ をとる。関数

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

のグラフを C とする。 C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $O(0, 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件： Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

第 5 問

O を原点とする xyz 空間に点 $P_k\left(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}, 0\right)$, $k = 0, 1, \dots, n$, をとる。
また, z 軸上 $z \geq 0$ の部分に, 点 Q_k を線分 P_kQ_k の長さが 1 になるようにとる。三
角錐 $OP_kP_{k+1}Q_k$ の体積を V_k とおいて, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

を求めよ。

第 6 問

N を正の整数とする。 $2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$$

を

$$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_N, a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし、 b_i の次に a_i 、 a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また、数列 $\{1, 2, \dots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において、数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば、 $N=3$ のとき、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので、 $f(1)=2$ 、 $f(2)=4$ 、 $f(3)=6$ 、 $f(4)=1$ 、 $f(5)=3$ 、 $f(6)=5$ である。

- (1) 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。
- (2) $1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し、 $f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れることを示せ。
- (3) n を正の整数とし、 $N = 2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると、 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ にもどることを証明せよ。