

第 1 問

a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1, \quad f(1) = 1$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し,
$$f(x) \leq 3x^2 - 1$$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

第 2 問

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A, $7 + 7i$ を表す点を B とする。
ただし, i は虚数単位である。正の実数 t に対し,

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$$

を表す点 P をとる。

- (1) $\angle APB$ を求めよ。
- (2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

第 3 問

xyz 空間において、平面 $z = 0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし、点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に、平面 $z = 0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H 、平面 $z = 1$ 上の点 $(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。 H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $z = t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $t = 1 - \cos \theta$ のとき、 $S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t) dt$ を求めよ。

第 4 問

2次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の2つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする。

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく。

- (1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また, $n \geq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。
- (2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。
- (3) α^{2003} 以下の最大の整数の1の位の数を求めよ。

第 5 問

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

- (1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。
- (3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$$

を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

第 6 問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。