

# 入学試験問題

## 数学 (B)



(配点 120 点)

平成 17 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

### 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用にも使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはいけません。

受験番号						
------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入しなさい。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

$x > 0$  に対し  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  とする。

(1)  $n = 1, 2, \dots$  に対し  $f(x)$  の第  $n$  次導関数は、数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を用いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し、 $a_n$ ,  $b_n$  に関する漸化式を求めよ。

(2)  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  とおく。 $h_n$  を用いて  $a_n$ ,  $b_n$  の一般項を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

$|z| > \frac{5}{4}$  となるどのような複素数  $z$  に対しても  $w = z^2 - 2z$  とは表されない複素数  $w$  全体の集合を  $T$  とする。すなわち,

$$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leq \frac{5}{4} \right\}$$

とする。このとき、 $T$  に属する複素数  $w$  で絶対値  $|w|$  が最大になるような  $w$  の値を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

### 第 3 問

関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$$

とする。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $x > \frac{1}{2}$  ならば  $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$  であることを示せ。
- (2)  $x_0$  を正の数とすると、数列  $\{x_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) を、 $x_{n+1} = f(x_n)$  によって定める。 $x_0 > \frac{1}{2}$  であれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

であることを示せ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

3 以上 9999 以下の奇数  $a$  で,  $a^2 - a$  が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 5 問

$N$  を 1 以上の整数とする。数字  $1, 2, \dots, N$  が書かれたカードを 1 枚ずつ、計  $N$  枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

- (i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を  $a$  とする。ひいたカードはもとに戻す。
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を  $b$  とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b = 0$  とする。  
 $a + b > N$  の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iii)  $a + b \leq N$  の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を  $c$  とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a + b < c$  の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iv)  $a + b \geq c$  の場合は、乙はもう 1 回カードをひく。そのカードに書かれた数を  $d$  とする。 $a + b < c + d \leq N$  の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 $a$  の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を  $a$  を用いて表せ。
- (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を  $a$  を用いて表せ。

ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

$r$  を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$y^2 + z^2 \geq r^2$$

$$z^2 + x^2 \leq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)