

# 入学試験問題

## 数学(理科)

(配点 120 点)

平成 22 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

### 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所、裏面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 1 問

3 辺の長さが  $a$  と  $b$  と  $c$  の直方体を、長さが  $b$  の 1 辺を回転軸として  $90^\circ$  回転させるとき、直方体が通過する点全体がつくる立体を  $V$  とする。

- (1)  $V$  の体積を  $a, b, c$  を用いて表せ。
- (2)  $a + b + c = 1$  のとき、 $V$  の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

(1) すべての自然数  $k$  に対して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2)  $m > n$  であるようなすべての自然数  $m$  と  $n$  に対して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

### 第 3 問

2つの箱LとR, ボール30個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン1枚を用意する。 $x$ を0以上30以下の整数とする。Lに $x$ 個, Rに $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す。

(#) 箱Lに入っているボールの個数を $z$ とする。コインを投げ, 表が出れば箱Rから箱Lに, 裏が出れば箱Lから箱Rに,  $K(z)$ 個のボールを移す。ただし,  $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$ ,  $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ とする。

$m$ 回の操作の後, 箱Lのボールの個数が30である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15) = P_2(15) = \frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

- (1)  $m \geq 2$ のとき,  $x$ に対してうまく $y$ を選び,  $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。
- (2)  $n$ を自然数とするととき,  $P_{2n}(10)$ を求めよ。
- (3)  $n$ を自然数とするととき,  $P_{4n}(6)$ を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C: y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と、その上の相異なる 2 点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  を考える。

- (1)  $P_i (i = 1, 2)$  を通る  $x$  軸に平行な直線と、直線  $y = x$  との交点を、それぞれ  $H_i (i = 1, 2)$  とする。このとき  $\triangle OP_1H_1$  と  $\triangle OP_2H_2$  の面積は等しいことを示せ。
- (2)  $x_1 < x_2$  とする。このとき  $C$  の  $x_1 \leq x \leq x_2$  の範囲にある部分と、線分  $P_1O$ ,  $P_2O$  とで囲まれる図形の面積を、 $y_1, y_2$  を用いて表せ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 5 問

$C$ を半径1の円周とし、 $A$ を $C$ 上の1点とする。3点 $P, Q, R$ が $A$ を時刻 $t=0$ に出発し、 $C$ 上を各々一定の速さで、 $P, Q$ は反時計回りに、 $R$ は時計回りに、時刻 $t=2\pi$ まで動く。 $P, Q, R$ の速さは、それぞれ $m, 1, 2$ であるとする。(したがって、 $Q$ は $C$ をちょうど一周する。)ただし、 $m$ は $1 \leq m \leq 10$ をみたす整数である。 $\triangle PQR$ が $PR$ を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ $m$ と時刻 $t$ の組をすべて求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

四面体  $OABC$  において、4つの面はすべて合同であり、 $OA = 3$ 、 $OB = \sqrt{7}$ 、 $AB = 2$  であるとする。また、3点  $O$ 、 $A$ 、 $B$  を含む平面を  $L$  とする。

- (1) 点  $C$  から平面  $L$  におろした垂線の足を  $H$  とおく。 $\overrightarrow{OH}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ。
- (2)  $0 < t < 1$  をみたす実数  $t$  に対して、線分  $OA$ 、 $OB$  各々を  $t : 1 - t$  に内分する点をそれぞれ  $P_t$ 、 $Q_t$  とおく。2点  $P_t$ 、 $Q_t$  を通り、平面  $L$  に垂直な平面を  $M$  とするとき、平面  $M$  による四面体  $OABC$  の切り口の面積  $S(t)$  を求めよ。
- (3)  $t$  が  $0 < t < 1$  の範囲を動くとき、 $S(t)$  の最大値を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)