第　1　問

昆虫の増殖や人口問題を扱う，数理生態学という学問分野がある。ベルハルスト（1845）は，生物の増殖に関する有名な方程式を提案している。その内容の概略は以下の通りである。

ある生物の個体数を x，単位時間あたりの増加数を y とする。x，y の間には，$y = \gamma x$ なる関係がある。ここで，γ を増殖率と呼ぶ。ある生態系における生物の増殖を長時間観察すると増殖率 γ は一定ではなく，個体数の変化に伴って1次関数的に変化することが分かっており，これを考慮すれば，$\gamma = a(1 - bx)$ と表せる。これより，個体数の時間的な変化を表す次の式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - bx)x \qquad ①$$

ただし，a，b は正の定数である。これをロジスティック方程式と呼ぶ。

A

式①を解いて，x を時刻 $t = 0$ における初期値 x_0（$x_0 > 0$）と時間 t の関数として表す手続きに関する以下の設問に答えよ。

1　$s = \dfrac{1}{x}$ と変数変換し，式①から $\dfrac{ds}{dt}$ を s の関数として表せ。

2　1で得られた式を解いて，s を求めよ。

3　初期条件を適用して，x を初期値 x_0 と時間 t の関数として表せ。

B

式①の左辺の微分を，次の式で近似する。ただし，Δt は正とする。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad ②$$

式②を式①の左辺に代入すると $x(t + \Delta t)$ と $x(t)$ の関係式が得られる。なお，式①の右辺の x には，$x(t)$ を代入するものとする。

さて，この生物は，一定の時間間隔で一斉に生殖し，世代交代するものと仮定する。ここで，連続的な時間 t について考察する代わりに，自然数で表される「世代」を考える。

式②の分母の Δt を1つの世代の時間間隔，また，分子の $x(t+\Delta t)-x(t)$ を第 $n+1$ 世代の個体数 x_{n+1} と第 n 世代の個体数 x_n の差とみなし，

$$A = 1 + a\Delta t,\ \ u_n = \frac{ab\Delta t}{A}x_n \qquad ③$$

と置けば，ロジスティック写像と呼ばれる次の方程式が得られる。

$$u_{n+1} = f(u_n) = A(1-u_n)u_n \qquad ④$$

ここで，$f(u_n)$ は u_n から u_{n+1} を求める関数であり，これを写像 f と呼ぶ。

いま，u_nの定義域を閉区間 $0 \leqq u_n \leqq 1$ とし，$1 < A \leqq 4$ であるとする。このとき u_n から u_{n+1} への写像 f によって得られる u_{n+1} の値域は閉区間 $0 \leqq u_{n+1} \leqq 1$ に入る。この写像から u_{n+1} の様々な挙動が発生する。以下では，図式を用いて A の値を小さい方から大きい方へと変化させた時の u_{n+1} の挙動を求めることにする。

図式解法の手順を示す。図1の放物線は，式④を u_n を横軸，u_{n+1} を縦軸として表したものである。ただし，$A = 3.2$ である。第0世代に対応する初期値を u_0 とし，この値を出発点とし，写像 f を n 回繰り返すことで u_n が求められる。

縦軸上で得られた値を横軸に折り返し，写像 f を逐次繰り返すと図2（分かりやすくするために隣り合う点を直線で結んである）のような u_n の時間的変化が求められる。この操作によって求められる u_0，u_1，u_2，… を時系列と呼ぶ。この操作の手順は，写像 f を表す放物線と縦軸の値を横軸の値に写す写像を表す $u_{n+1} = u_n$ を用いて，図式的に示すことができる。まず，横軸上の初期値 u_0 から出発して，縦方向に移動して放物線と交わる点 u_1 を求める。その後，横方向に移動して直線と交わる点を求める。この点を出発点として，同じ操作を行うことにより u_2 が求まる。この操作を繰り返すことにより，時系列が求められる。

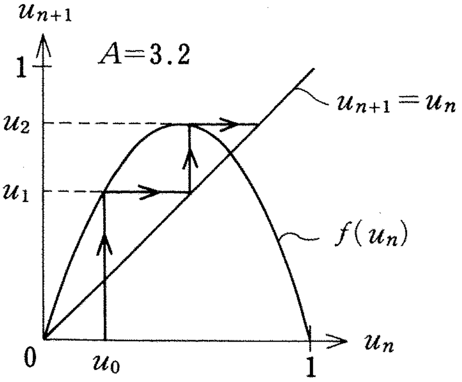

図 1

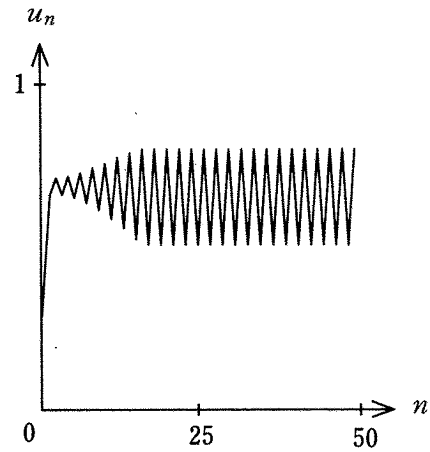

図 2

4　$A=1.5$ の場合について，初期値 u_0 を 0.25 にとって上記の操作を行い，u_1，u_2 を求めよ。

5　A が大きい場合には，写像 f を繰り返すと，u_n は図 3 に示すように特定の値に収束する。これを 1 回写像の固定点と呼ぶ。この点に対応する u_n を A の関数で表せ。

6　さらに A が大きい場合には，図 2 の例のように，u_n は時間が経過するとともに振動的挙動を示す。このときの挙動を検討するために，写像 f を 2 回繰り返す f^2 について考察する。ここで，f^2 は u_n から u_{n+2} への写像であり，$u_{n+2}=f^2(u_n)=f\{f(u_n)\}$ と表せる。f^2 を A と u_n で表せ。

7　$u_{n+2}=f^2(u_n)$ を図示したものが図 4 である。この関数は，$u_{n+2}=u_n$ の直線と 4 回交わる。この 4 つの交点のうち，1 つは，1 回写像の固定点である。このことを使って，残る 3 点に対応する u_n を求めよ。

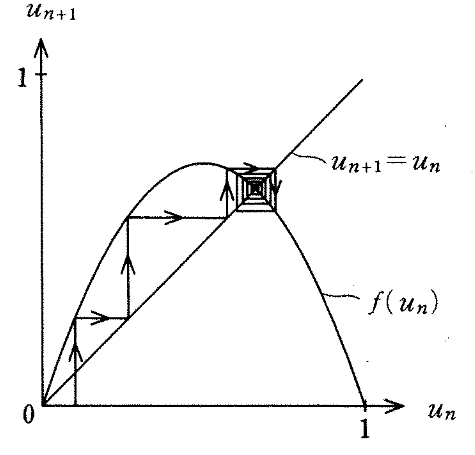

図 3

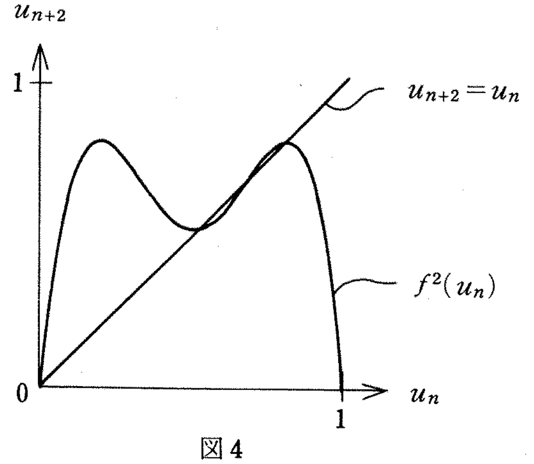

図 4

C

図2のようなケースを2周期的変化（注：1回おきに同じ値をとるような変化のこと）と呼ぶ。さらに大きなAについてこのような検討を行えば，4周期的変化，8周期的変化，… が得られ，$A > 3.5699456\cdots$ では，非周期的変化に変わる。

非周期的変化を示す $A = 4$ の場合

$$u_n = \sin^2(\pi\theta_n) \qquad （ただし 0 \leqq \theta_n \leqq 1 である） \qquad ⑤$$

と置いて式④に代入すれば，u_{n+1} と u_n との関係は，θ_{n+1} と θ_n との関係に帰着できる。

8　θ_{n+1} と θ_n との間の関係式を求めよ。さらに，横軸に θ_n，縦軸に θ_{n+1} をとり，θ_n から θ_{n+1} への写像を図示せよ。

第　2　問

スーパーコンピュータは超高速の処理能力をもつコンピュータで，大学のコンピュータセンターなどに置かれ，主に科学技術計算に使用される。ここでは，ネットワークにつながれ，多数のユーザーが利用するスーパーコンピュータの動作を考えよう。ユーザーはスーパーコンピュータで処理するプログラム（ジョブと呼ぶ）をネットワークを介して送り，スーパーコンピュータは受け付けた順にひとつずつそれらを処理する。

A

まず，ジョブの受け付けを考えよう。多数の利用者からあるスーパーコンピュータにジョブがランダムに到着するものとする。ランダムに到着とは，微小時間 Δt の間にジョブが到着する確率を，正の定数 λ を用いて $\lambda\Delta t$ と表せることである。このとき，ある時間間隔 t の間にジョブが到着しない確率 $E(t)$ が $e^{-\lambda t}$ となることを次の手順で示せ。

1　Δt の間にジョブが到着しない確率を求めよ。

2　$E(t)$ と $E(t+\Delta t)$ の関係を表せ。

3　2で求めた式の $\Delta t \to 0$ の極限をとり $\dfrac{dE(t)}{dt}$ を求め，その式を $E(0)=1$ の条件で解け。

B

次に，スーパーコンピュータでのひとつのジョブの処理を考える。ジョブには，処理に要する時間が短いものも長いものもさまざまある。ここでは，ジョブの処理時間のばらつきについて，処理が開始されてからジョブが終了するまでに要する時間はランダムであるとする。つまり，処理の行われているジョブが微小時間 Δt の間に終了する確率を $\mu\Delta t$ とし，μ は正の定数とする。このとき，処理が開始され

てから時間 t が経過するまでの間にそのジョブが終了しない確率 $F(t)$ は **A** と同様に $e^{-\mu t}$ となる。ここで

4　時間 t が経過するまでの間にジョブが終了する確率 $G(t)$ を求め，それを横軸 t に対して図示せよ。

5　次に，ジョブの処理時間が確率的にどのように分布しているかを考えよう。ジョブの処理時間が T である確率を $H(T)$ という関数で表す。ここで $H(T)$ を T について 0 から t まで積分したものが $G(t)$ であることを利用して $H(T)$ を求め，それを横軸 T に対して図示せよ。

6　$H(T)$ から，ひとつのジョブの処理時間の平均を求めよ。

C

さて，ジョブはスーパーコンピュータに到着すると処理に移される。前に到着したジョブの処理が終了する前に次のジョブが到着すると，そのジョブは前のジョブが終了するまで待たされ，前のジョブの終了後に処理が開始される。ジョブの処理はひとつずつ行われるものとし，複数のジョブの並列処理は考えない。

ここで，ジョブの到着とジョブ処理時間のばらつきは上の **A**，**B** と同一の条件であるとし，定数 λ，μ を用いるものとする。ある時刻 t において処理が実行中のものと待っているものを合わせ n 個のジョブが蓄えられている確率を $P_n(t)$ とする。ジョブがひとつ到着すれば n は 1 増加し，ひとつ処理されれば n は 1 減少する。

7　微小時間 Δt の間の変化を考え，$n \geqq 1$ に対して $P_n(t+\Delta t)$ を $P_{n-1}(t)$，$P_n(t)$，$P_{n+1}(t)$ で表せ。この式の $\Delta t \to 0$ の極限をとり，$\dfrac{dP_n(t)}{dt}$ を $P_{n-1}(t)$，$P_n(t)$，$P_{n+1}(t)$ で表せ。

8　同様のことを $n=0$ について考え，$\dfrac{dP_0(t)}{dt}$ を $P_0(t)$，$P_1(t)$ で表せ。

9　さて，ここで $P_n(t)$ （$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）が時間の推移に対してその統計的性質が変化しない定常状態になったものとし，$P_n(t)=p_n$ と書くこととする。これを定常確率過程という。このとき $\dfrac{\lambda}{\mu}=k$ として p_1，p_2 および p_n を p_0 で表せ。ここで $k<1$ とする。

10　$p_0+p_1+\cdots+p_n+\cdots=1$ の条件を用いて p_0，すなわちジョブがすぐに受け入れられる確率を求めよ。

11　待っているジョブの数の期待値を求めよ。