数　学　問　題

（平 成 21 年 度）

【注意事項】

1. この問題冊子は「０６　数学」である。
2. 試験時間は 120 分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後，以下の５および６に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は１ページから４ページまである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に２枚はさみこんである。
7. ２枚ある解答用紙に，受験番号と氏名を所定の欄（１枚につき受験番号は２箇所，氏名は１箇所）に試験開始後，記入すること。
8. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手を挙げて監督者に申し出ること。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。裏面には記入しないこと。
10. 問題冊子の中の白紙部分については下書き等に使用してよい。
11. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
12. 試験終了まで退室を認めない。試験中の気分不快や用便等，やむを得ない場合には，手を挙げて監督者を呼び指示に従うこと。
13. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

[I] 以下の問いに答えよ。ただし，解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) a, b, c は定数で $a > 0$ とする。

(ア) 関数

$$f(x) = e^{-ax^2-bx-c}$$

は，$x = \boxed{\mathrm{A}}$ で最大となり，その値は $\boxed{\mathrm{B}}$ となる。

(イ) 公式

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を用いると，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

の値は $\boxed{\mathrm{C}}$ となる。

(2) 箱の中に A と書かれたカード，B と書かれたカード，C と書かれたカードがそれぞれ４枚ずつ入っている。男性６人，女性６人 が箱の中から１枚ずつカードを引く（引いたカードは戻さない）。

(ア) A と書かれたカードを４枚とも男性が引く確率は $\boxed{\mathrm{D}}$ となる。

(イ) A, B, C と書かれたカードのうち，少なくとも一種類のカードを４枚とも男性または４枚とも女性が引く確率は $\boxed{\mathrm{E}}$ となる。

[II] X, Y をそれぞれ成分が負でない整数からなる 2×2 行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) X を

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。$YX = A$ ならば

$$a \leqq 9$$

であることを示せ。特に, $c = 0$ ならば a は 1 または 3 であることを示せ。

(2) $BX = XA$ となるための必要十分条件は

$$a = 3b - 2c, \quad d = 2b - 4c$$

であることを示せ。

(3) 二つの等式

$$YX = A, \quad XY = B$$

を同時に満たす X および Y は存在しないことを示せ。

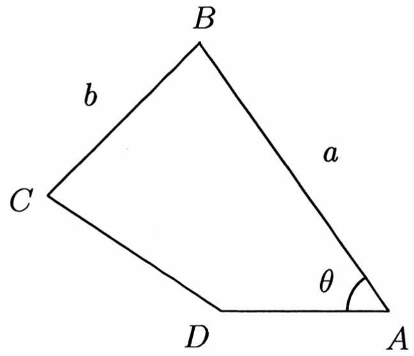
[III] 平面上に四角形 ABCD があり,

$$\mathrm{AB} = a, \quad \mathrm{BC} = b, \quad \angle \mathrm{A} = \theta$$

とする。条件

$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C}, \quad \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad b < a < \frac{b}{2\cos\theta}$$

のもとで, 以下の問いに答えよ。



(1) $\mathrm{CD} = c$ を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ。

(2) a, b を固定して, θ が $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を動くとき c の最小値を求めよ。

[IV] 関数 $\phi(x)$ およびその導関数 $\phi'(x)$ が ある開区間 J 上で次の等式をみたすとする。

$$\phi'(x) = a(x) + b(x)\phi(x) + c(x)\phi(x)^2 \qquad (*)$$

ここに $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ は J 上の与えられた連続関数である。以下 $(*)$ をみたす関数 $\phi(x)$ を $(*)$ の解と呼ぶ。

開区間 J 上では, $(*)$ の異なる二つの解 $\phi_i(x)$, $\phi_j(x)$ に対して

$$\phi_i(x) \neq \phi_j(x) \qquad (x \in \mathrm{J})$$

が成り立つと仮定する。

以下の問いに答えよ。ただし, 簡単のため $\phi = \phi(x)$, $\phi' = \phi'(x)$ と略記する。

(1) ϕ_i, ϕ_j を $(*)$ の異なる二つの解とする。このとき

$$\frac{\phi_i{}' - \phi_j{}'}{\phi_i - \phi_j}$$

を求めよ。

(2) ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を $(*)$ の異なる三つの解とし, さらに ϕ を ϕ_3 と異なる $(*)$ の任意の解とする。そして

$$(\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{(\phi - \phi_1)(\phi_2 - \phi_3)}{(\phi - \phi_3)(\phi_2 - \phi_1)}$$

とおく（複比と呼ばれる）。このとき

$$\frac{d}{dx}(\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = 0$$

を示せ。

(3) (2) より

$$(\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = K \text{ (定数)}$$

となる。これより ϕ を K と ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を用いて表せ（分子と分母に K が含まれるようにせよ）。