

## 数 学 問 題

(平成 22 年 度)

## 【注意事項】

1. この問題冊子は「06 数学」である。
2. 試験時間は 120 分である。
3. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後、以下の 5 および 6 に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は 1 ページから 4 ページまでである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に 3 枚はさみこんである。
7. 3 枚ある解答用紙に、受験番号と氏名を所定の欄（1 枚につき受験番号は 2 箇所、氏名は 1 箇所）に試験開始後、記入すること。
8. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙がない場合は、手を挙げて監督者に申し出ること。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。裏面には記入しないこと。
10. 問題冊子の中の白紙部分については下書き等に使用してよい。
11. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
12. 試験終了まで退室を認めない。試験中の気分不快や用便等、やむを得ない場合には、手を挙げて監督者を呼び指示に従うこと。
13. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

[ I ] 以下の問いに答えよ。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 4次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

を考える。ただし、 $a, b, c, d, e$  は定数で、 $a \neq 0$  とする。 $x = t + \alpha$  ( $\alpha$  は定数) とおいて、 $t$  に関する4次方程式

$$t^4 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

の形にする。このとき  $D = 0$  となる条件式を  $a, b, c, d$  を用いて表せ。

(2)  $R$  を正の実数とする。極限值

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{R^2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2} dx$$

を求めよ。

(3) 地震のエネルギー ( $E$ ) とマグニチュード ( $M$ ) の間には

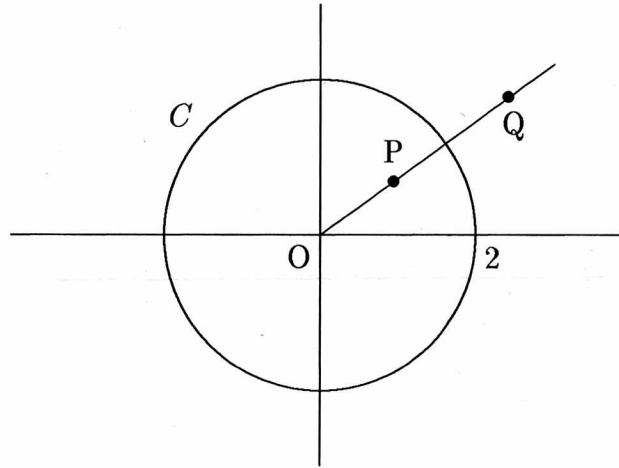
$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

の関係がある (単位系は省略)。2009年8月に起きた駿河湾地震のマグニチュードは6.5であり、気象庁によればこの地震は予想されている東海地震とは異なる。東海地震のマグニチュードは8程度と想定されており、それを8.0と仮定してこの二つの地震のエネルギーの比を求めたい。駿河湾地震のエネルギーを  $E_S$ 、東海地震のそれを  $E_T$  とおき

$$\frac{E_T}{E_S}$$

を求めよ。簡単のために近似値  $10^3 \cong 2^{10}$ ,  $\sqrt{2} \cong 1.41$  を用いて計算し、小数点以下は切り捨てること。

〔Ⅱ〕 座標平面上の原点  $O$  を中心とする半径  $2$  の円を  $C$  とする。 $O$  を始点とする半直線上の二点  $P, Q$  について  $OP \cdot OQ = 4$  が成立するとき、 $P$  と  $Q$  は  $C$  に関して対称であるという（下の図では、 $P$  は  $C$  の内側にとっている）。以下の問いに答えよ。



(1) 点  $P(x, y)$  の  $C$  に関して対称な点  $Q$  の座標を  $x, y$  を用いて表せ。

(2) 点  $P(x, y)$  が原点を除いた曲線

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

上を動くとき、 $Q$  の軌跡を求めよ。

〔Ⅲ〕  $n$  は自然数とする。1 以上の実数  $a, d$  と正の実数  $b, c$  を成分とする行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し、 $n$  個の積  $A^n$  を

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad A^1 = A$$

とおく。また、 $0 < v \leq u$  をみたす実数  $u, v$  と正の実数  $\lambda$  に対して、 $A$  は等式

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\left(1 + \frac{v}{u}\right) \lambda^n \leq a_n + b_n + c_n + d_n \leq \left(1 + \frac{u}{v}\right) \lambda^n$$

を示せ。

(2)  $M$  を  $1 + \frac{1}{b}$  と  $1 + \frac{1}{c}$  の大きい方 ( $b = c$  の場合はどちらでも良い) とするとき、不等式

$$a_n + b_n + c_n + d_n < M(a_{n+1} + d_{n+1})$$

を示せ。

(3) 数列

$$\left\{ \frac{1}{n} \log(a_n + d_n) \right\}$$

の極限值を求めよ。

〔IV〕  $a > 0$  とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $0 \leq x \leq a$  をみたす  $x$  に対して

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + \frac{e^a - 1}{a}x$$

を示せ。

(2) (1) を用いて

$$1 + a + \frac{a^2}{2} < e^a < 1 + \frac{a}{2}(e^a + 1)$$

を示せ。

(3) (2) を用いて

$$2.64 < e < 2.78$$

を示せ。