横浜市立大学

5 2

【医学科】

数 学 問 題

(平 成 29 年 度)

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は120分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに，以下の5および6に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は1ページから5ページまである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に4枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後，4枚ある解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること(1枚につき受験番号は2箇所，氏名は1箇所)。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び，指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕以下の問いに答えよ。ただし, 解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)

$$\frac{148953}{298767}$$

を約分して, 既約分数にせよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 2x}dx$ を求めよ。

(3) 空間上の 4 点 A, B, C, D が $\mathrm{AB} = 1$, $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$, $\mathrm{AD} = 2\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$, $\angle\mathrm{CAD} = 60^\circ$, $\angle\mathrm{DAB} = 90^\circ$ をみたす。このとき, この 4 点を通る球の半径を求めよ。

(4) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

とする。このとき, 導関数 $f'(x)$ の最大値を求めよ。

〔II〕 k, m, n を自然数とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

とする。このとき, $f(x)$ を

$$f(x) = 2\cos\boxed{\text{X}} \times \sin\boxed{\text{Y}}$$

の形で表したい。X, Y に入る式をそれぞれ答えよ。

(2) x を $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ をみたす実数とする。このとき,

$$\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \sum_{k=1}^{m}\cos kx$$

を求めよ。

(3) 関数

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\cos kx$$

に対して,

$$g_n(x) \geqq -\frac{n+1}{2}$$

がつねに成り立つことを証明せよ。

〔III〕 投げたとき, 表の出る確率が p, 裏の出る確率が $1-p$ であるコインがある。ただし, p は $0<p<1$ をみたす実数である。A 君と B 君はこのコインを使って以下のような公平な勝負をすることを思いついた。

- コインを 2 回投げる。
- 始めに表, 次に裏が出たら A 君の勝ちとする。
- 始めに裏, 次に表が出たら B 君の勝ちとする。
- それ以外だった場合, 始めからやり直す。

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して, コインをちょうど $2n$ 回投げて A 君が勝つ確率と, コインをちょうど $2n$ 回投げて B 君が勝つ確率は等しいことを証明せよ。

(2) A 君と B 君のどちらかが勝つまでにコインを投げる回数が $2n$ 回以下である確率を求めよ。

(3) (2) で求めた確率は p が $\dfrac{1}{2}$ のとき最大になることを証明せよ。

(4) x を $0<x<1$ をみたす実数とする。このとき,

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$$

を証明せよ。

(5) コインをちょうど $2n$ 回投げたときに勝負がつく確率を a_n とする。このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2ia_i$$

を求めよ。

〔Ⅳ〕 大腸菌によるタンパク質の生成に関する実験を考える。シャーレに大腸菌を入れ培養し, 3 時間後, 6 時間後, 9 時間後に生成されたタンパク質の量を測定する (複数のシャーレを用いて測定する。それぞれのシャーレごとに測定誤差が出る)。各時間ごとに, 測定されたタンパク質の量の平均値を以下に示す。

時間 (時間)	平均値 (mg)
0	5.0
3	11.0
6	15.0
9	17.0

t 時間後のタンパク質の量 (mg) を $P(t)$ とする。初期値は, $P_0 = P(0) = 5.0$ である。

生成されるタンパク質の量は, 方程式

$$P'(t) = \kappa - \gamma P(t) \qquad (*)$$

をみたす $P(t)$ で近似されることが知られている。ここで κ および γ は定数で, γ を決めることがもっとも重要な問題である。

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 関数

$$P(t) = \frac{\kappa}{\gamma} + \left(P_0 - \frac{\kappa}{\gamma}\right) e^{-\gamma t}$$

は方程式 (*) の解であることを証明せよ。

(2) $\alpha = \frac{\kappa}{\gamma}$ とすると, (*) の解は

$$P(t) = \alpha + (5.0 - \alpha)e^{-\gamma t}$$

となる。この解を実験データに合わせたい。そのために $t = 3$ および $t = 9$ のデータの平均値を使う。すなわち,

$$P(3) = 11.0, P(9) = 17.0$$

とする。このとき, 関係式

$$e^{-9\gamma} = \left(e^{-3\gamma}\right)^3$$

を用いて α の値を求めよ。

(3) $P(3) = 11.0$ および (2) の α を用いて γ を求めよ。簡単にするため, a と b を定数として

$$\gamma = a \log b$$

の形で表わせ (可能な限り簡潔な形にせよ)。

(4) 以上のことを用いて $P(6)$ の値を求めよ。