

1 a を実数とする. 2次方程式 $x^2 - 2ax + a + \frac{1}{4} = 0$ について, 次の問いに答えよ. (50点)

問 1 実数解をもつとき, a の値の範囲を求めよ.

問 2 2つの解の差が1であるとき, a の値を求めよ.

問 3 すべての解が1より大きい実数であるとき, a の値の範囲を求めよ.

(解答は次のページを使用すること)

2 放物線 $y = 1 - x^2$ 上の点 $P(t, 1 - t^2)$ における接線を L とする. ただし $0 < t < 1$ とする. 接線 L と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ A, B とする. 次の問いに答えよ. (50 点)

問 1 接線 L の方程式と, 点 A の x 座標を求めよ.

問 2 放物線 $y = 1 - x^2$ と線分 PB および y 軸で囲まれる部分の面積を $S(t)$, 放物線 $y = 1 - x^2$ と線分 PA および点 A を通る y 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積を $T(t)$ とする. $\lim_{t \rightarrow 0} \{S(t) \cdot T(t)\}$ を求めよ.

問 3 $0 < t < 1$ の範囲で面積の和 $S(t) + T(t)$ が最小になる t の値を a とする. このとき $S(a) > T(a)$ を示せ.

(解答は次のページを使用すること)

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を B , $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ. (50点)

問 1 B を求めよ.

問 2 $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E$ をみたす実数 α を求めよ.

問 3 問 2 の実数 α と自然数 n について, 等式 $\alpha^n B^n = n\alpha B - (n-1)E$ を数学的帰納法によって証明せよ.

問 4 A^{100} を求めよ.

(解答は次のページを使用すること)

4

 $x < 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \left\{ \left((1-x)e^x + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1 $f(x)$ を定積分を使って表し、 $f(x)$ を求めよ。

問 2 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ を示せ。ただし、 $\lim_{t \rightarrow 0} t \log |t| = 0$ は既知としてよい。

問 3 $x < 1$ の範囲で、 $f(x)$ の極値を求めよ。

(解答は次のページを使用すること)