

1 次の問に答えよ。(50点)

問 1 関数 $y = x^2 \sin(3x + 5)$ の導関数を求めよ。

問 2 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx$ の値を求めよ。

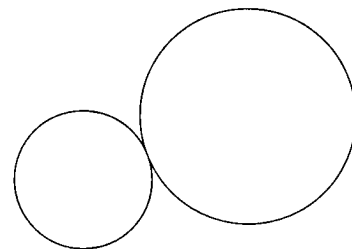
問 3 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{n^4} \right)^{\frac{1}{3}}$ の値を求めよ。

(解答は次のページを使用すること)

2 円 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ に外接し、直線 $x = -1$ に接する円の中心の軌跡を C とする。次の問に答えよ。ただし、ふたつの円が外接するとは、右の図のような状態のことである。(50点)

問 1 C の方程式を求めよ。

問 2 点 $(2, 0)$ を通る直線が C と 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ で交わる時、 y_1 と y_2 の積 $y_1 y_2$ の値を求めよ。



外接する円

(解答は次のページを使用すること)

- 3 α, β は $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。 $\alpha \leq t \leq \beta$ となる t に対して、 $S(t) = \int_{\alpha}^{\beta} |\sin x - \sin t| dx$ とおく。 $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ。 (50 点)

(解答は次のページを使用すること)

4 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ とおく。次の問に答えよ。(50点)

問 1 I_1 を求めよ。さらに, すべての自然数 n に対して, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

問 2 不等式 $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

問 3 これらの結果を使って, $\log 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ が成り立つことを示せ。

(解答は次のページを使用すること)