

数 学 甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には、問題として , , , が出題されている。
全問解答すること。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}$ は、 $A^2 = O$ を満たす。ただし、 O は零行列である。(50点)

問 1 a の値を求めよ。

問 2 $B = 2E + A$ とおく。ただし、 E は単位行列である。自然数 n に対して、 B^n を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で表される曲線を C とする。(50 点)

問 1 曲線 C の凹凸を調べ、その概形を図示せよ。

問 2 曲線 C 上の点 $P(a, b)$ ($0 < a < 1$) における接線 l の x 切片, y 切片をそれぞれ a を用いて表せ。

問 3 問 2 において点 P が曲線 C 上を動くとき, P における接線 l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積の最大値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採 点 欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 0を原点とする空間内に n 個の点 $P_k\left(\frac{k}{n}, 2 - \frac{k}{n}, 0\right)$ ($k=1, 2, \dots, n$)をとる。また、 z 軸上に点 Q_k を、線分 $P_k Q_k$ の長さが2になるようにとる。ただし、 Q_k の z 座標は正とする。(50点)

問1 三角形 $OP_k P_{k+1}$ の面積を求めよ。ただし、 $1 \leq k \leq n-1$ とする。

問2 三角錐 $OP_k P_{k+1} Q_k$ の体積 V_k を求めよ。ただし、 $1 \leq k \leq n-1$ とする。

問3 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ とおくと、 I を定積分を用いて表せ。ただし、 $V_0 = 0$ とする。

問4 I の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
問4	
小計	

4 r を 9 以上の整数として、赤球 r 個と白球 10 個が入っている袋がある。この袋から 9 個の球を同時に取り出し、そのうちの赤球の個数を調べ、取り出した球に白球を 1 個加えて袋に戻すという試行を繰り返す。つまり、1 回の試行ごとに袋の中の白球が 1 個ずつ増えることになる。 n 回目の試行において取り出された 9 個の球のうち、赤球がちょうど 4 個である確率を P_n で表す。(50 点)

問 1 $P_1 < P_2$ が成り立つことを示せ。

問 2 $P_n < P_{n+1}$ が成り立つための n の範囲を r を用いて表せ。

問 3 $r = 50$ のとき、 P_n が最大となる n の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採 点 欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	