

数 学 甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には、問題として  ,  ,  ,  が出題されている。  
全問解答すること。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  に対して以下の問いに答えよ。(50点)

問 1  $U = P^{-1}AP$  とする。 $U$  を求めよ。

問 2  $n$  を自然数とする。 $U^n$  を推測し、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

問 3  $A^n$  を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 3点 $O(0, 0, 0)$ ,  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(1, 2, 1)$ がある。(50点)

問1  $z$ 軸上の点 $C(0, 0, m)$ から直線 $AB$ 上の点 $H$ におろした垂線を $CH$ とする。このとき、点 $H$ が線分 $AB$ 上にあるような $m$ の値の範囲を求めよ。

問2 点 $H$ が線分 $AB$ 上にあるとき、垂線 $CH$ の長さの最大値、最小値とそのときの $H$ の座標を求めよ。

問3 三角形 $OAB$ に外接する円の中心 $P$ の座標とその半径 $r$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

- 3 点 $(a, b)$ を通り曲線 $y = x^3 - x$ に接するような異なる3本の直線が存在するための実数 $a, b$ が満たすべき必要十分条件を求め、それを満たす点 $(a, b)$ の存在する領域を図示せよ。(50点)

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
小計	

4  $a > 0$  とし,

$$f(x) = a^2(x+1)e^{-ax}$$

とおく。(50点)

問1 関数  $f(x)$  の最大値とそのときの  $x$  の値を求めよ。

問2 問1で求めた  $x$  の値を  $c$  とする。曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸,  $y$  軸および直線  $x = c$  で囲まれた図形の面積を  $S(a)$  とする。

$0 < a < 1$  における  $S(a)$  の最大値とそのときの  $a$  の値を求めよ。ただし,  $e > 2$  であることを証明なしに用いてよい。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
小計	