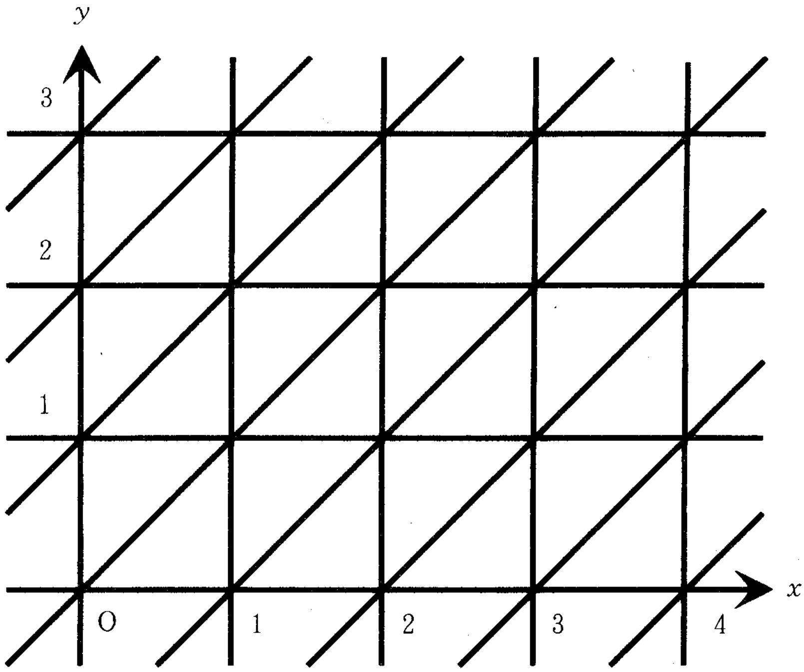
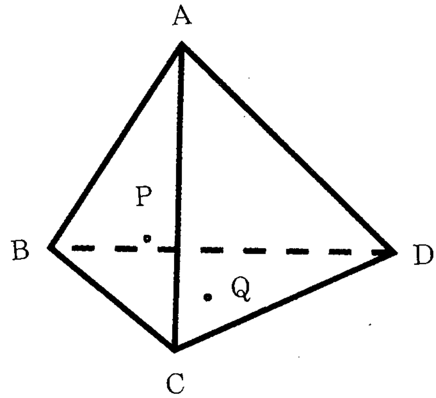
1. xy 平面全体が下図のような直線の配列で埋められているとする。



このとき，点 $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ と $P\left(m+\frac{2}{3}, n+\frac{1}{3}\right)$ について，A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし，m，n は負でない整数であるとする。

2. 四面体 ABCD を考える。



面 ABC 上の点 P と面 BCD 上の点 Q について，

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD}$$

とおくとき，$x : y = s : t$ ならば，線分 AQ と DP が交わることを示せ。

3. 二つの関数

$$f(x) = x(1-x), \qquad g(x) = \frac{2x}{2+x}$$

を用いて，数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$を

$$0 < a_0 = b_0 < \frac{1}{2}$$
$$a_{n+1} = f(a_n),\ b_{n+1} = g(b_n),\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1) $0 < x < \dfrac{1}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加であることを示せ。
またx > 0のとき，

$$f(x) < g(x) < x$$

であることを示せ。

(2) $n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$0 < a_n < b_n < \dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(3) b_n を求めよ。

4. 関数

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x}$$

を考える。$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ。

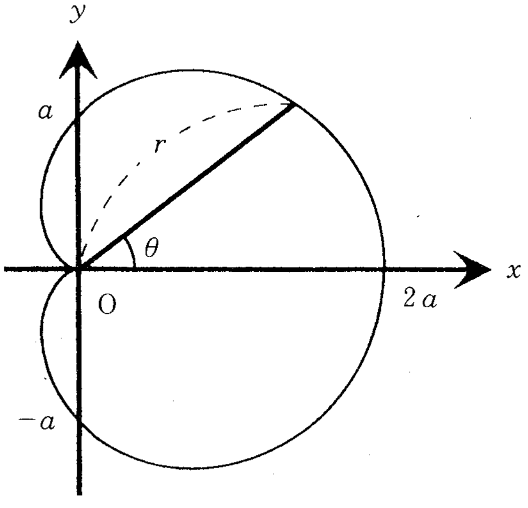
(2) $f(x)$ の最小値を求めよ。またその最小値を与える x に対して，$\cos x$ の値を求めよ。

(3) $y=f(x)$ のグラフの x 軸より下方にある部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

5. $a>0$を定数として，極方程式

$$r=a(1+\cos\theta)$$

により表される曲線C_aを考える。



次の問いに答えよ。

(1) 極座標が$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$の点を中心とし半径が$\frac{a}{2}$である円$S$を，極方程式で表せ。

(2) 点Oと曲線C_a上の点$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$とを結ぶ直線が円Sと交わる点をQとするとき，線分PQの長さは一定であることを示せ。

(3) 点Pが曲線C_a上を動くとき，極座標が$(2a,\ 0)$の点とPとの距離の最大値を求めよ。