1. 行列 A、B を

$$A=\begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

とする。次の問に答えよ。

(1) A の逆行列が存在しないような k の値を求めよ。

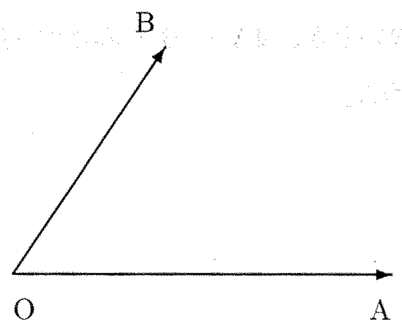
(2) A の逆行列が存在するとき、$AX=B$ となる $X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を a、b、k を用いて表わせ。

(3) A の逆行列が存在しないとき、$AX=B$ をみたす行列 X があるような a、b の値を求めよ。

2. 3点 O、A、B は、一直線上にない点とし、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$、 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。このとき次の問に答えよ。

(1) 点 P を $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (t は実数) をみたす点とする。このとき、 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を、 $\vec{a}$、 $\vec{b}$、 t であらわせ。

(2) 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (s は実数) をみたす点とする。P と Q の中点を M とする。t、 s が $0 \leqq t \leqq 1$ 、$0 \leqq s \leqq 1$ をみたしながら変化するとき、点 M の存在する範囲を図示せよ。



3. 次の問に答えよ。

(1) a, b, c を整数とする。x に関する 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解をもつならば、その解は整数であることを示せ。ただし、正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 m、n を用いて $\dfrac{n}{m}$ と表せることを用いよ。

(2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ は、有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。

4. 関数

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\log x}{x} \qquad (x > 0)$$

を考える。次の問に答えよ。ただし、e は自然対数 $\log x$ の底である。

(1) $f(x)$ の極値と変曲点を求め、グラフの概形を描け。ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。また、グラフと座標軸との交点の座標は求めなくてよい。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)dx$ の値を求めよ。

5. 白球 3 個、 赤球 2 個、 青球 1 個 合計 6 個の球の入っている袋がある。最初に A 君が、次のルール (i)、 (ii) に従って 袋から球を 1 個または 2 個取り出す。次に B 君が同じルールに従って、袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す。ただし、いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする。

(i) 取り出した 1 個目が赤球ならば、 2 個目を取り出すことはできない。

(ii) 取り出した 1 個目が赤球以外ならば、 さらに 1 個だけ取り出す。

白球は 1 点、 赤球は 2 点、 青球は 3 点とし、取り出した球の合計点を各自の得点とする。このとき次の問に答えよ。

(1) A 君と B 君の得点が同じになる確率 p_1 を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率 p_2 を求めよ。