1. 0 でない複素数 z に対して，$w = u + iv$ を

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

とするとき，次の問に答えよ。ただし，u，v は実数，i は虚数単位である。(配点 30 点)

(1) 複素数平面上で，z が単位円 $|z| = 1$ 上を動くとき，w はどのような曲線を描くか。u，v がみたす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。

(2) 複素数平面上で，z が実軸からの偏角 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の半直線上を動くとき，w はどのような曲線を描くか。u，v がみたす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。

2. 正の整数 n に対して，連立不等式

$$\begin{cases} 0 < x \leqq n \\ x \leqq y \leqq 3x \end{cases}$$

の表す領域を D_n とする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 領域 D_n 内にある格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の個数を S_n とする。S_n を n で表せ。ただし，格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである。

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を始点とし，領域 D_n 内の格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，ベクトル

$$\overrightarrow{v_1} = (1,\ 1),\quad \overrightarrow{v_2} = (1,\ 2),\quad \overrightarrow{v_3} = (1,\ 3)$$

と 0 以上の整数 m_1，m_2，m_3 を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + m_3\overrightarrow{v_3}$$

と表せることを証明せよ。

3. 正の実数 a, b に対して，2 つの曲線

$$C_1 \ : \ a y^2 \ = \ x^3 \quad (x \geqq 0, \quad y \geqq 0)$$

$$C_2 \ : \ b x^2 \ = \ y^3 \quad (x \geqq 0, \quad y \geqq 0)$$

の原点 O 以外の交点を P とする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 交点 P の座標を求め，2 つの曲線 C_1, C_2 の概形を描け。

(2) 2 つの曲線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積を，a と b で表せ。また，この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。

4. 関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であることの定義を述べよ。

(2) 次の 2 つの命題のうち正しいものを選び，それが正しい理由を示せ。

(i) $f(x)$ が $x=a$ において連続ならば，必ず，$f(x)$ は $x=a$ において微分可能である。

(ii) $f(x)$ が $x=a$ において連続であっても，$f(x)$ は $x=a$ において微分可能であるとは限らない。

(3) 関数 $f(x)=\cos x$ が $x=a$ において微分可能であることを，(1) で答えた定義を用いて証明せよ。

5. 数字 1，2，$\ldots$，N の書かれたカードが 1 枚ずつ N 枚入っている箱から，元に戻さずに 1 枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える。ここで，$2 \leqq k \leqq N$ とする。引いたカードの順に，書かれている数字を x_1，x_2，$\ldots$，x_k とする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$，すなわち，k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ。

(2) i は整数で，$2 \leqq i \leqq k$ をみたすとする。

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} \\ x_{i-1} > x_i \end{cases}$$

である確率，すなわち，k 枚のカードのうち $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き，i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ。

(3) N は 5 以上の整数で，$k=5$ とする。$2 \leqq i \leqq 5$ をみたす各整数 i について上の (2) の事象が起こるとき，得点 i 点が与えられるとする。それ以外のときの得点は 0 点とする。このとき，得点の期待値を求めよ。