1. 次の問に答えよ。ただし，i は虚数単位とする。(配点 30 点)

(1) 複素数 z に対し，$w = \dfrac{z-i}{z+i}$ とする。z が実軸上を動くとき，複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ に対し，$w_1 = \dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2 = \dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$ とする。$z \neq \pm i$ のとき，複素数平面上で w_1 を表す点を P，w_2 を表す点を Q とする。P，Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。

2. 三角形ABCがあり，$\mathrm{AB}=2$，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{CAB}>\dfrac{\pi}{4}$ とする。点Aから辺BCに下ろした垂線の足をHとし，$\angle\mathrm{CAH}=\alpha$ とする。辺ABの中点をMとする。線分AM上にAと異なる点Xをとる。3点A, X, Hを通る円の中心をP，半径をr，$\angle\mathrm{PAH}=\theta$ とする。この円と直線ACとの交点で，Aと異なる点をYとする。次の問に答えよ。

(配点30点)

(1) $\cos\theta$ を r を用いて表せ。

(2) AX+AY を r と α を用いて表せ。

(3) Xのとり方によらず，AX+AY が常に一定の値になるときの α の値を求めよ。

3. 関数 $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2 - 3x + 18}$ とする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $f(x)$ の極小値をすべて求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値を求めよ。ただし，必要ならば $e > 2.7$ を用いてよい。

4. $f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0) = 0$，$f(\pi) = 0$ をみたすとする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = -\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx$ を示せ。

(2) $f(x) = x(x-\pi)$ のとき，実数 a に対し

$$F(a) = \int_0^\pi \{a\,f(x) - \sin x\}^2\,dx$$

とする。a を変化させたとき，$F(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

5. 座標平面上の点 $(p,\ q)$ で，p と q がともに整数であるものを格子点という。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 自然数 n に対し，$p+2q=n,\ p>0,\ q>0$ をみたす格子点 $(p,\ q)$ の個数を a_n とする。a_n を求めよ。

(2) 自然数 n に対し，$p+2q<n,\ p>0,\ q>0$ をみたす格子点 $(p,\ q)$ の個数を b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。