

(平 16 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

注 意

- 1 問題は 1 ～ 5 ページ。2 ページの次の白紙(2 枚)は下書き用紙である。
- 2 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 積 ABC を計算せよ。
- (2) $BCAB = kB$ となる定数 k を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して, $(ABC)^n$ を計算せよ。

2. $\alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5}$ とする。ただし、 i は虚数単位である。

100 個の複素数 $z_1, z_2, \dots, z_{100}$ を

$$z_1 = \alpha, z_n = z_{n-1}^3 \quad (n = 2, \dots, 100)$$

で定める。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) z_5 を α を用いて表せ。

(2) $z_n = \alpha$ となるような n の個数を求めよ。

(3) $\sum_{n=1}^{100} z_n$ の値を求めよ。

3. a を正の定数とする。不等式 $a^x \geq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。(配点 30 点)

4. t を正の実数とし, k を自然数とする。無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$$

を考える。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 上の無限級数の和を $f_k(t)$ とするとき, それを t と k を用いて表せ。

(2) $x > 0$ のとき, $F_k(x) = \int_1^x f_k(t) dt$ を計算せよ。

(3) $x > 0$ のとき, $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$ を求めよ。

5. 次のようなゲームを考える。下のように1から9の数字が書かれている表を用意する。

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方、9枚のカードがあり1から9までの数字が1つずつ書かれている。これらのカードをよくまぜ、順に並べる。カードを並べた順に見て、カードに書いてある数字を表から消し、かわりに＊印を書き込む。この表で縦、横あるいは斜めのいずれかに＊印が3つはじめて並んだ時、その時点で表にある＊印の個数を得点とする。例えば、最初の4枚のカードが、順に5、4、6、9であれば、以下のように変化する。

＊	2	8
1	9	3
7	4	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	＊

＊	2	8
1	＊	3
7	＊	＊

その結果、＊印がはじめて3つ並んだ。このとき、得点は4である。

次の問に答えよ。(配点30点)

- (1) このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ。また、得点が最小となる確率を求めよ。
- (2) このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ。また、得点が最大となる確率を求めよ。