

(平 18 前)

数 学

(理 科 系)

(1～5 ページ)

注 意

- 1 問題は 1～5 ページ。2 ページの次の白紙(2 枚)は下書き用紙である。
- 2 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

と
り
ま
す

1. 平面上に原点 O から出る, 相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり, $\angle XOY < 180^\circ$ とする. 半直線 OX 上に O と異なる点 A を, 半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく. 次の間に答えよ. (配点 30 点)

(1) 点 C が $\angle XOY$ の二等分線上にあるとき, ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて

$$\vec{c} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

と表されることを示せ.

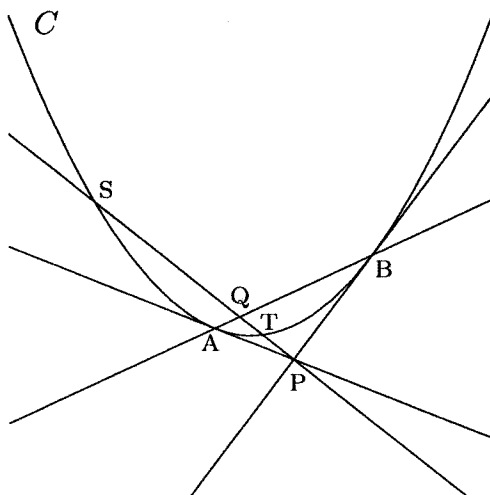
(2) $\angle XOY$ の二等分線と $\angle XAB$ の二等分線の交点を P とおくととき, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を \vec{a}, \vec{b} および 3 辺の長さ $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{b} - \vec{a}|$ を用いて表せ.

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ と、実数 x, y, z, w を成分とする行列

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を考える. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) X について関係式 $XA = AX$ が成立するための, x, y, z, w の条件を求めよ.
- (2) X が $X^2 = A$ を満たすとき, $XA = AX$ が成立することを示せ.
- (3) $X^2 = A$ を満たす行列 X をすべて求めよ.

3. xy 平面において放物線 $C: y = x^2$ と、その下側にある点 $P(p, q)$ ($q < p^2$) を考える. P を通るような C の 2 つの接線を考え、その接点をそれぞれ A, B とする. また、 P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S, T で交わるとする.



点 A, B の x 座標をそれぞれ a, b とし、点 S, T の x 座標をそれぞれ s, t とする. 次の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $a + b, ab$ を p, q で表せ.
- (2) $s + t, st$ を p, q, m で表せ.
- (3) 直線 AB と直線 ST の交点を Q とし、 Q の x 座標を u とする. 上図のように $s < u < t < p$ となる場合について、等式

$$\frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$$

が成立することを示せ.

4. xyz 空間に 3 点 $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 0)$, $R(-1, 1, 2)$ をとる. 次の間に答えよ. (配点 30 点)

(1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき, 平面 $z = t$ と, $\triangle PQR$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ.

(2) $\triangle PQR$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

5. $\alpha = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2}$ とする. ただし, i は虚数単位である. 次の問に答えよ.

(配点 30 点)

- (1) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ (p, q は実数) を求めよ.
- (2) 整数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について, 解の 1 つは α であり, また $0 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする. このような整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.