

(平 19 前)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

**注意** 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 四面体 ABCD において, 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする. このとき, 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1)  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OR}$  を用いて表せ.

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき, 線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ.

2.  $xy$  平面において,  $O$  を原点,  $P$  を第 1 象限内の点とする. このとき, 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 2 点  $O, P$  を頂点とし,  $y$  軸上に底辺を持つ二等辺三角形を考える. この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点  $P$  の軌跡  $T$  の方程式を求めよ.

(2)  $T$  を (1) で求めた軌跡とし,  $a$  を実数とする. このとき, 軌跡  $T$  と直線  $y = a(x - 1)$  が第 1 象限内で交点をもつような,  $a$  の範囲を求めよ.

3.  $f(x) = e^x - x$  について, 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 実数  $x$  について  $f(x) \geq 1$  であることを示せ.
- (2)  $t$  は実数とする. このとき, 曲線  $y = f(x)$  と 2 直線  $x = t$ ,  
 $x = t - 1$  および  $x$  軸で囲まれた図形の面積  $S(t)$  を求めよ.
- (3)  $S(t)$  を最小にする  $t$  の値とその最小値を求めよ.

4.  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$  で表される曲線を  $C$  とおく. このとき,

次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1)  $y$  を  $x$  の式で表せ.
- (2)  $x$  軸と  $C$  で囲まれる図形  $D$  の面積を求めよ.
- (3)  $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.

5. 次の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ. 選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ.
- (2) 1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する. この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ.