

(平 20 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 実数 x, y に関する次の各命題の真偽を答えよ. さらに, 真である場合には証明し, 偽である場合には反例をあげよ.

(配点 30 点)

(1) $x > 0$ かつ $xy > 0$ ならば, $y > 0$ である.

(2) $x \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ ならば, $y \geq 0$ である.

(3) $x + y \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ ならば, $y \geq 0$ である.

2. xy 平面上に 3 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$ をとる.

このとき, 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) A , B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する. このような r の値を求めよ.

(2) (1) で求めた r の値について, C を中心とする半径 r の円が, A , B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ.

(3) A , B , C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する. このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ.

3. 1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の和を S とするとき、次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば、 S が偶数であることを示せ.

(2) S が偶数ならば、 n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ.

(3) S が 4 の倍数ならば、 n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ.

4. xy 平面上に 5 点 $A(0, 2)$, $B(2, 2)$, $C(2, 1)$, $D(4, 1)$, $P(0, 3)$ をとる. 点 P を通り傾き a の直線 l が, 線分 BC と交わり, その交点は B, C と異なるとする. このとき, 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) a の値の範囲を求めよ.

(2) 直線 l と線分 AB , 線分 BC で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 , 直線 l と線分 BC , 線分 CD で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とするとき, それらの和 $V = V_1 + V_2$ を a の式で表せ.

(3) (1) で求めた a の値の範囲で, (2) で求めた V は,

$a = -\frac{3}{4}$ のとき最小値をとることを示せ.

5. n, k を自然数とする. このとき, 次の間に答えよ.

(配点 30 点)

(1) $(1+x)^n$ の展開式を用いて, 次の等式を示せ.

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$$

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ を求めよ.

(3) 2 次の正方行列 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ は, それぞれが

$\frac{1}{3}$ の確率で, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のいずれ

かになるとする. n 個の行列の積 $M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$ が

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と等しくなる確率を求めよ.