(平 21 前)　　　　**数　　　学**

(理　科　系)

(1 ～ 5 ページ)

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学(理科系)　　150 点

1. a, b は実数で $a > b > 0$ とする．区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \log\Big(ax + b(1-x)\Big) - x\log a - (1-x)\log b$$

ただし，log は自然対数を表す．このとき，以下のことを示せ．(配点 30 点)

(1) $0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ．

(2) $f'(c) = 0$ をみたす実数 c が，$0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数 x に対して，

$$ax + b(1-x) \geqq a^x b^{1-x}$$

が成り立つ．

2. $f(x)=x^3-3x+1$, $g(x)=x^2-2$ とし, 方程式 $f(x)=0$ について考える. このとき, 以下のことを示せ. (配点30点)

(1) $f(x)=0$ は絶対値が2より小さい3つの相異なる実数解をもつ.

(2) α が $f(x)=0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる.

(3) $f(x)=0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば,

$$g(\alpha_1)=\alpha_3, \quad g(\alpha_2)=\alpha_1, \quad g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる.

3. aを$0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$の範囲にある実数とする．2つの直線$x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$および2つの曲線$y = \cos(x - a)$, $y = -\cos x$によって囲まれる図形をGとする．このとき，以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) 図形Gの面積をSとする．Sをaを用いた式で表せ．

(2) aが$0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，$S$を最大にするような$a$の値と，そのときの$S$の値を求めよ．

(3) 図形Gをx軸の周りに1回転させてできる立体の体積をVとする．Vをaを用いた式で表せ．

4. 大小2つのサイコロを同時に1回投げて，大きいサイコロの出た目の数A，および小さいサイコロの出た目の数Bに応じて得点を競うゲームを考える．ただし，このゲームには6種類の得点X_n $(1 \leqq n \leqq 6)$があって，それぞれ，次の規則で定められているとする：

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geqq n\text{のとき}) \\ B & (A < n\text{かつ}A \neq B\text{のとき}) \\ aA + b & (A < n\text{かつ}A = B\text{のとき}) \end{cases}$$

ここで，a, bは実数の定数である．また，得点X_nの期待値をE_nとする．このとき，以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) A, Bのとり得る値に対する得点X_3およびX_4の値を，答案用紙の表にそれぞれ記入せよ．

(2) $E_4 - E_3$を求めよ．

(3) $E_1 = E_2 = \cdots = E_6$となるようなa, bはあるか．あれば求めよ．なければ，そのことを示せ．

5. tを実数として, 数列$a_1, a_2, \ldots$を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2t,$$
$$a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

で定める. このとき, 以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) $t \geqq 1$ならば, $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$となることを示せ.

(2) $t \leqq -1$ならば, $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$となることを示せ.

(3) $-1 < t < 1$ならば, $t = \cos\theta$となるθを用いて,

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \qquad (n \geqq 1)$$

となることを示せ.